



ویژه کنکور ۱۴۰۴

رشته ریاضی و تجربی

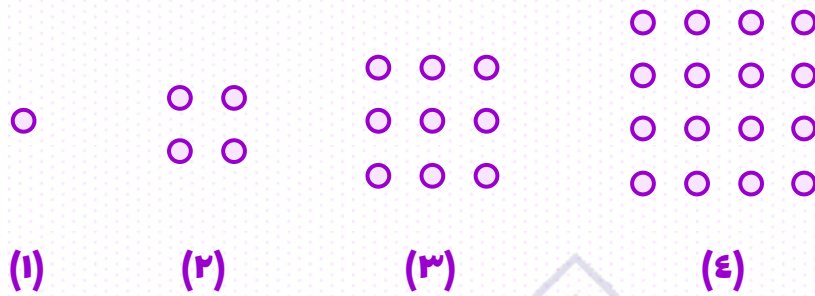
# FIRST CLASS CLASSINO

مهندس آریان حیدری





## الگو و دنباله



...

الگو

→ ۱, ۴, ۹, ۱۶, ...      دنباله      →  $t_n =$

جمله عمومی دنباله

مربعی

خطی



تست کردن جمله اول

→ ۱, ۴, ۷, ۱۰, ...      →  $t_n = \boxed{a} n + \boxed{b}$

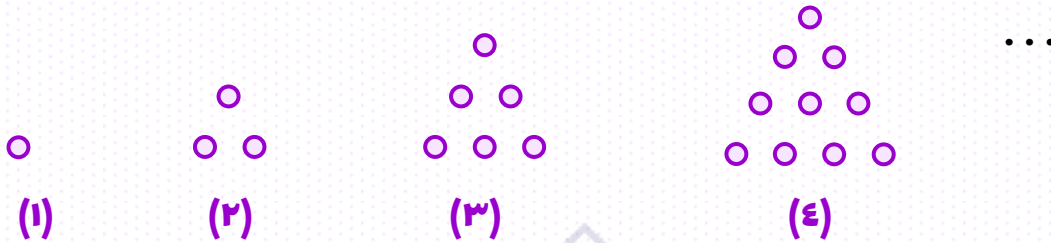
+۳    +۳    +۳

فاصله (قدر نسبت)

تمرین: ۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ...      →  $t_n =$



## درجه دو



تست کردن جمله اول

→  $t_n = a n^2 + b n + c$

↓ نصف فاصله فاصله

↓ جمله .....!

مثالی

تمرین:

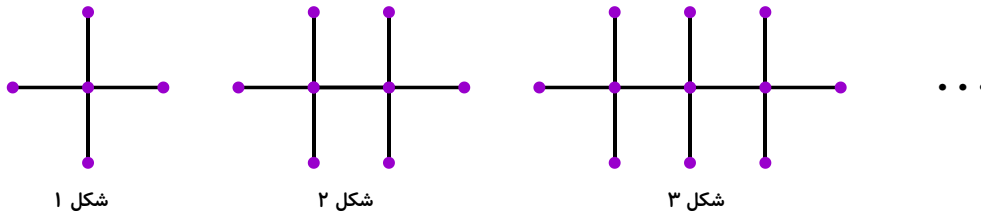
۲, ۴, ۸, ۱۴, ...

تحصیل باما



(کتاب موج آزمون نشر الگو)

۱. تعداد نقاط شکل بیستم در الگوی مقابل چندتا است؟



۶۰ (۱)

۶۱ (۲)

۶۲ (۳)

۶۴ (۴)

شکل ۱

شکل ۲

شکل ۳

پاسخ: گزینه ۳

راه حل اول:

تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شماره شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد نقاط	$1+3+1$	$2+4+2$	$3+5+3$	...	$n+(n+2)+n$

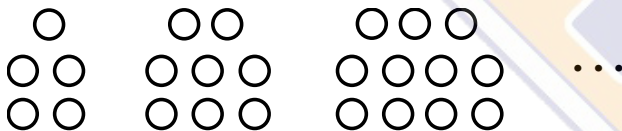
بنابراین در شکل nام،  $3n+2$  نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

راه حل دوم:

اگر ۴ نقطه به چهار گوشه شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل nام برابر  $3(n+2)$  خواهد بود. پس در شکل nام،  $3(n+2)-4$  نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

(تجربی قارچ ۹۸)

۲. در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل دوازدهم، کدام است؟



۳۴ (۱)

۳۶ (۲)

۳۸ (۳)

۴۰ (۴)

تحصیل باما

پاسخ: گزینه ۳

با نوشتن تعداد نقطه‌ها در مراحل اول داریم:

۵, ۸, ۱۱, ...

پس با یک الگو خطی با قدرنسبت  $d=3$  و جمله اول  $a_1=5$  مواجهیم.

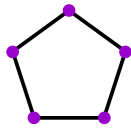
$$a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + 3(n-1)$$

کافی است جمله دوازدهم این دنباله حسابی را بیابیم:

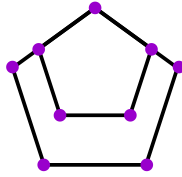
$$a_{12} = 5 + (12-1)(3) = 38$$



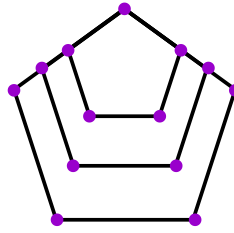
کتاب موج آزمون نشر الگو



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

...

۴۰ (۱)

۴۱ (۲)

۵۰ (۳)

۵۱ (۴)

۳. تعداد نقاط روی شکل دهم از الگوی زیر کدام است؟

پاسخ: گزینه ۲

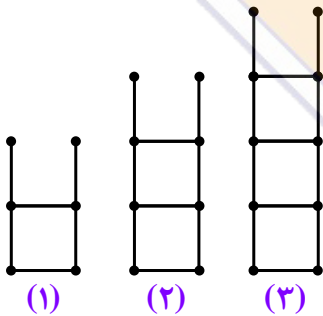
تعداد نقاط روی شکل اول برابر با ۵ است و در هر مرحله ۴ نقطه به شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله  $n$ ام به تعداد  $(n-1) \times 4$  نقطه به ۵ نقطه شکل اول اضافه شده است:

$$4(n-1) + 5 = 4n + 1$$

یعنی شکل  $n$ ام،  $4n + 1$  نقطه دارد.

پس شکل دهم  $4 \times 10 + 1 = 41$  نقطه دارد.

فعالیت کتاب درسی



...

۴. با توجه به الگوی مقابل، تعداد پاره‌خطها در کدام مرحله، ۳۳ تا است؟

خطرا!

۸ (۱)

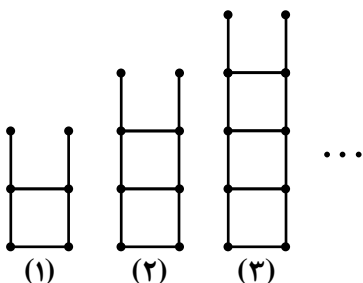
۹ (۲)

۱۰ (۳)

۱۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

به کمک جدول زیر، تعداد پاره‌خطهای هر مرحله را می‌نویسیم:



...

شماره مرحله	۱	۲	۳	...	$n$
$a_n$	$2 \times 3$	$3 \times 3$	$4 \times 3$	...	$(n+1) \times 3$

پس جمله عمومی این دنباله  $a_n = 3n + 3$  است. حالا دنبال مرحله‌ای هستیم که  $a_n = 33$  باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

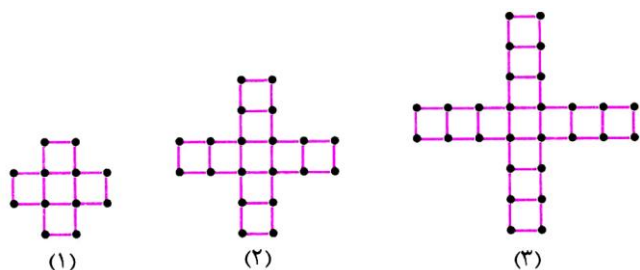
$$3n + 3 = 33 \Rightarrow 3n = 30 \rightarrow n = 10$$

در مرحله دهم، تعداد پاره‌خطها ۳۳ تا است.



(کتاب نردبام فیلی سبز)

۵. در الگوی مقابل، در شکلی که ۵۳ مربع وجود دارد، تعداد رأس‌ها کدام است؟



۱۰۲ (۱)

۱۰۴ (۲)

۱۰۶ (۳)

۱۰۸ (۴)



تحصیل با ما

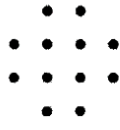


(تمرین کتاب درسی)

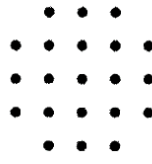
۶. در الگوی هندسی زیر، شکل دهم از چند نقطه تشکیل شده است؟



(۱)



(۲)



(۳)

...

۱۲۰ (۱)

۱۳۰ (۲)

۱۴۰ (۳)

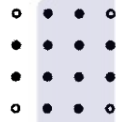
۱۵۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

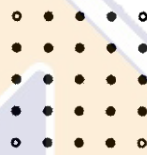
اگر شکل‌ها را به صورت زیر رسم کنیم:



(۱)



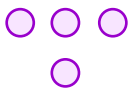
(۲)



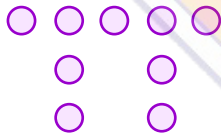
(۳)

می‌بینیم تعداد نقطه‌ها در شکل  $n$  ام برابر است با  $a_n = (n+2)^2 - 4$  یعنی  $a_n = n^2 + 4n$ ، پس در شکل دهم  $a_{10} = 10^2 + 4(10) = 140$  نقطه داریم.

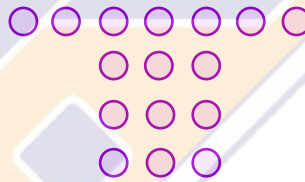
۷. جمله عمومی تعداد دایره‌ها در شکل  $n$  ام به صورت  $t_n = an^2 + bn + c$  است. کدام  $2a + b - c$  است؟ (کتاب هرکول)



(۱)



(۲)



(۳)

, ...

۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

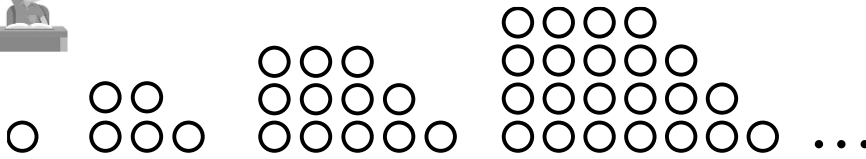
۶ (۴)

تحصیل باما



(تجربی ۹۸)

۸. در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل نهم، کدام است؟



۱۱۷ (۱)

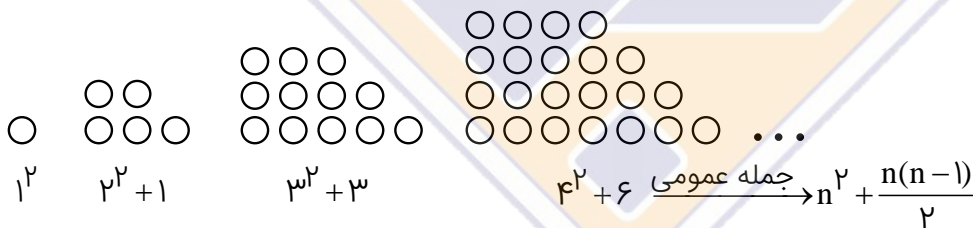
۱۲۰ (۲)

۱۲۳ (۳)

۱۲۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

سوال، به شدت شبیه یکی از تمرینات کتاب است. با توجه به مربع کامل‌های جدا شده، داریم:

پس برای تعیین جمله نهم کافیست به جای  $n$  بگذاریم ۹:  $9^2 + \frac{9(9-1)}{2} = 117$ 

بدون توجه به مربع کامل از طریق الگوی درجه دوم عمل می‌کنیم: افزایش‌ها تشکیل دنباله عددی دادن با قدر

نسبت ۳، پس ضریب  $n^2$  همیشه  $\frac{3}{2}$ 

$$\begin{array}{c} +4 \quad +7 \quad +10 \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 5 \quad 12 \quad 22 \quad \dots \end{array} \Rightarrow S_n = \frac{3}{2}n^2 + bn + c$$

بنابراین ضابطه  $S_n$  به صورت  $S_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 0$  است. حالا  $S_9$  را به دست می‌آوریم:

$$S_9 = \frac{3}{2} \times 9^2 - \frac{1}{2} \times 9 = 9 \left( \frac{27}{2} - \frac{1}{2} \right) = 9 \times \frac{26}{2} = 9 \times 13 = 117$$

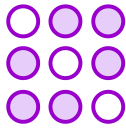




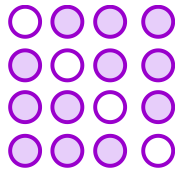
کتاب موج آزمون نشر الگو



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

...

۹. تعداد دایره‌های رنگی در شکل  $n$  ام الگوی زیر کدام است؟

(۱)  $n^2 + 1$

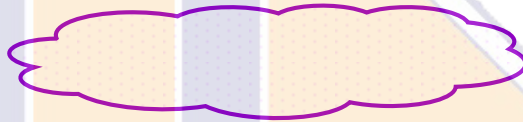
(۲)  $2n^2$

(۳)  $3n^2 - 1$

(۴)  $n^2 + n$

پاسخ: گزینه ۴

در شکل  $n$  ام،  $(n+1)^2$  دایره وجود دارد که  $(n+1)$  تای آن رنگ نشده است. پس تعداد دایره‌های رنگی  $(n+1)^2 - (n+1)$  است که برابر است با  $n^2 + n$ .



کتاب IQ آگاج

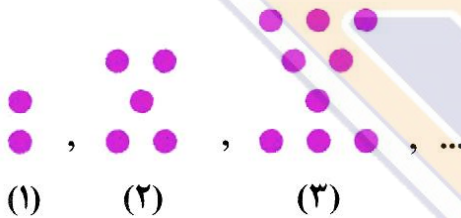
۱۰. با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در کدام مرحله برابر با ۲۷ است؟

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

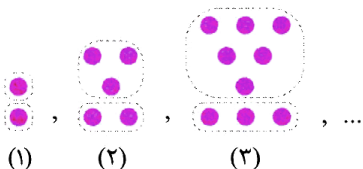
(۴) ۹



پاسخ: گزینه ۱

برای پیدا کردن جمله عمومی این الگو، دسته بندی مقابل را در نظر می‌گیریم:

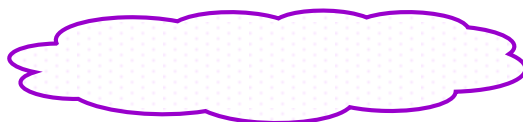
تحصیل باما



این الگو از یک الگوی مثلثی و یک دنباله که جملاتش به صورت  $1, 2, 3, \dots$  است تشکیل شده، پس جمله عمومی

این دنباله به صورت  $a_n = \frac{n(n+1)}{2} + n$  است، پس باید معادل زیر را حل کنیم:

$$\frac{n(n+1)}{2} + n = 27 \Rightarrow \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n = 27 \Rightarrow \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 27 = 0 \Rightarrow n^2 + 3n - 54 = 0 \Rightarrow n = 6, -9$$

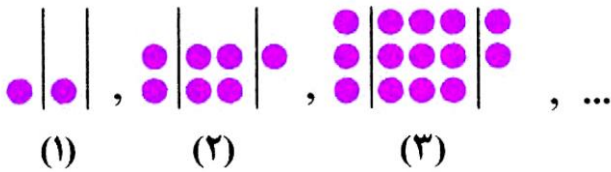




## حالات خاص مربعی و مثلثی

(کتاب IQ گاج)

۱۱. با توجه به الگوی مقابل، تعداد دایره‌ها در شکل دهم چندتا است؟



۱۲۱ (۱)

۱۲۳ (۲)

۱۱۷ (۳)

۱۱۹ (۴)

(آزمون قلمپی)

۱۲. در الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در شکل دهم کدام است؟



۵۵ (۱)

۶۵ (۲)

۴۵ (۳)

۵۰ (۴)

## تحصیل باما

پاسخ: گزینه ۱

الگوی مورد نظر از دو بخش تشکیل شده است که قسمت بالای آن دقیقاً هم تعداد با شماره‌ی مرحله‌ی آن شکل است، یعنی در شکل  $n$ ام،  $n$  دایره در بالای شکل خواهیم داشت.

اما در بخش پایینی، اعداد طبیعی از عدد ۱ تا یکی قبل از شماره‌ی مرحله‌ی آن شکل جمع می‌شوند. بنابراین در مرحله‌ی  $n$ ام،  $n + (1 + \dots + (n-1))$  دایره در پایین شکل خواهیم داشت. در نتیجه:

$$a_n = n + 1 + 2 + \dots + n - 1 = n + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow a_{10} = 10 + \frac{10 \times 9}{2} = 55$$



۱۳. مطابق الگوی زیر با تعدادی سکه، اشکالی را می‌سازیم. با در اختیار داشتن ۶۶ سکه، شکل مرحله چندم ساخته می‌شود؟

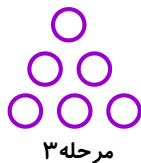
(آزمون گزینه‌دو)



مرحله ۱



مرحله ۲



مرحله ۳



مرحله ۴

...

دهم (۱)

یازدهم (۲)

دوازدهم (۳)

نهم (۴)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر n عددی طبیعی باشد، آنگاه:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مطابق الگوی داده شده، تعداد سکه‌ها در مرحله nم برابر مجموع اعداد ۱ تا n است.

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

می‌دانیم در شکل مرحله nم ۶۶ سکه وجود دارد، پس:

$$a_n = 66 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 66 \Rightarrow n(n+1) = 132 \Rightarrow n^2 + n - 132 = 0 \Rightarrow (n+12)(n-11) = 0 \Rightarrow n = 11 \text{ یا } n = -12$$

غرض n عدد طبیعی است، پس n = 11 تنها جواب قابل قبول است.

۱۴. در الگوی زیر، در چه شکلی نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها برابر با  $\frac{8}{17}$  است؟

(کتاب موج آزمون نشر الگو)

۱۸ (۱)

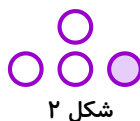
۱۷ (۲)

۱۶ (۳)

۱۵ (۴)



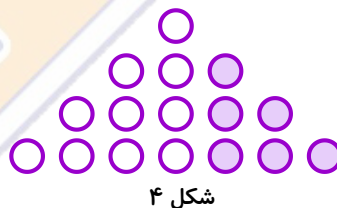
شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

...

تحصیل باما

پاسخ: گزینه ۲

تعداد کل گوی‌ها در شکل nم برابر است با:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل nم برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

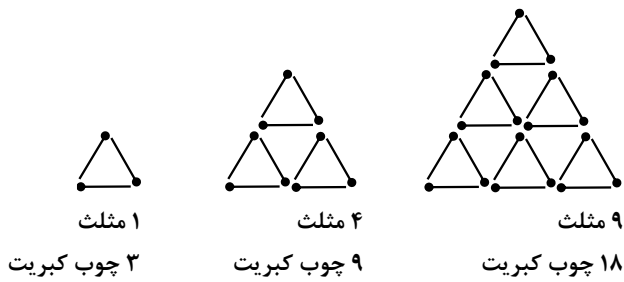
بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل nم برابر است با  $\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2} = \frac{n-1}{2n}$ . به این ترتیب  $\frac{n-1}{2n} = \frac{8}{17}$  پس n = 17

$$\text{ترتیب } \frac{n-1}{2n} = \frac{8}{17} \text{ پس } n = 17$$



(آزمون گزینه دو)

۱۵. مطابق الگوی زیر برای ساخت ۱۰۰ مثلث کوچک، چند چوب کبریت لازم است؟



۱۶۵ (۱)

۱۹۸ (۲)

۲۰۰ (۳)

(۴) با این الگو ۱۰۰ مثلث نمی‌توان ساخت.

پاسخ: گزینه ۱

نکته: مجموع  $n$  عدد طبیعی متوالی با شروع از یک برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مطابق الگویابی، دنباله تعداد مثلث‌ها و تعداد چوب کبریت‌ها به صورت زیر است:

تعداد مثلث‌ها:  $a_n: 1, 4, 9, 16, \dots \Rightarrow a_n = n^2$ تعداد چوب کبریت‌ها:  $b_n: 1 \times 3, 1 \times 3 + 2 \times 3, 1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3, 1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + 4 \times 3, \dots$ 

$$\Rightarrow b_n = 3 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) \Rightarrow b_n = \frac{3n(n+1)}{2}$$

بنابراین اگر تعداد مثلث‌ها برابر ۱۰۰ باشد، داریم:

$$a_n = 100 \Rightarrow n^2 = 100 \Rightarrow n = 10 \Rightarrow b_{10} = 3 \times \frac{10 \times 11}{2} = 3 \times 55 = 165$$



کتاب موج آزمون نشر الگو

۱۶. در الگوی زیر، در شکل چندم تعداد گوی‌های رنگی برابر با ۱۱۳ است؟

۱۷ (۱)

۱۵ (۲)

۱۶ (۳)

۱۴ (۴)

روش ۱:

روش ۲:



ترفند بدترین حالت ممکن: نه خطی شد! نه درجه ۲!

..... نگاه کن!

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شماره آن‌ها زوج است، نصف تعداد گوی‌ها نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها  $n^2 - 1$  خواهد بود که نصف آن‌ها را رنگ می‌کنیم و سپس گوی وسطی را نیز رنگ می‌کنیم. پس  $1 + \frac{n^2 - 1}{2}$  گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر  $n$  عددی زوج باشد،  $\frac{n^2}{2}$  نیز عددی زوج است. پس در شکل‌های با شماره زوج، تعداد گوی‌های رنگ شده زوج است و در شکل‌هایی با شماره فرد، تعداد گوی‌های رنگ شده فرد است. چون ۱۱۳ گوی رنگی در شکل  $n$  ام وجود دارد، پس  $n$  باید فرد باشد، بنابراین:

$$\frac{n^2 - 1}{2} + 1 = 113 \Rightarrow n^2 - 1 = 224 \Rightarrow n^2 = 225 \Rightarrow n = 15$$



۱۷. جمله عمومی یک دنباله خطی به صورت  $t_n = (a+b)n^3 - (3-2a)n^2 + bn + a$  است. اختلاف جملات ۵ ام و ۱۷ ام چقدر است؟

(کتاب بنفش کانون)

۱۲ (۴)

۱۸ (۳)

۲۴ (۲)

۳۰ (۱)

(تجربی ۱۴۰۱)

۱۸. اگر ۸ و ۵ به ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جمله شانزدهم کدام است؟

۱/۴ (۴)

۲/۴ (۳)

۹/۶ (۲)

۱۱/۶ (۱)

۱۹. اعداد ۱۴ و ۱۷/۲ به ترتیب جملات پنجم و هفتم یک دنباله درجه دوم هستند. اگر ضریب بزرگترین درجه جمله

(تجربی فارغ ۱۴۰۱)

عمومی، برابر  $\frac{1}{7}$  قرینه جمله پنجم باشد، جمله پانزدهم چند برابر جمله اول است؟

۵ (۴)

۴/۶ (۳)

۲/۴ (۲)

۲ (۱)

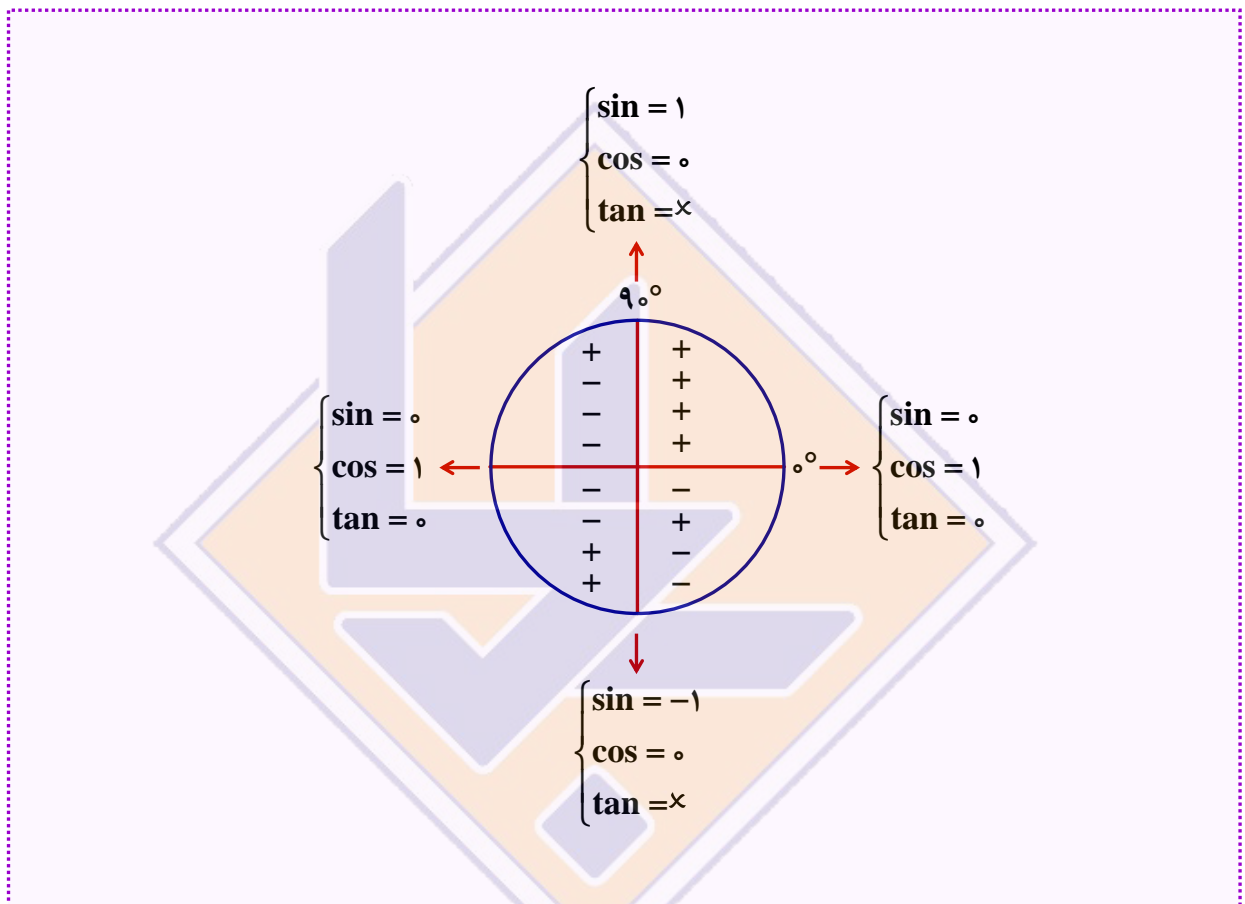


## استراتژی‌های چهارگانه آریان حیدری

استراتژی ۱

مثلات

یادآوری ۱:



یادآوری ۲:

	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sin			
cos			
tan			
cot			

یادآوری ۳:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$



(ریاضی قارج ۱۴۰۰)

۱. ساده‌ی شده‌ی عبارت  $\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)} + \frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ ، کدام است؟

$$2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (۴)$$

$$2 \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (۳)$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (۲)$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \rightarrow \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \Rightarrow 1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta \rightarrow 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta \rightarrow 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

پس داریم:

$$\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)} + \frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$

(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۲. حاصل عبارت  $\frac{\sin^4 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$  کدام است؟

$$\sin 2\alpha \quad (۴)$$

$$\cos 2\alpha \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$



تحصیل باما

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{(1 - \cos^2 \alpha)^2 + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{(1 - \sin^2 \alpha)^2 + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{(1 - 2 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{(1 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{\cos^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + 1}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + 1}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{(\cos^2 \alpha + 1)^2}{\cos^2 \alpha + 1} - \frac{(\sin^2 \alpha + 1)^2}{\sin^2 \alpha + 1} = (\cos^2 \alpha + 1) - (\sin^2 \alpha + 1)$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$





۳. اندازه زاویه A در مثلث ABC، ۴۵ درجه بیشتر از اندازه زاویه B است، حاصل  $2\cos A \sin B - \sin C$

کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۱)

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۱) \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲) \qquad \frac{3}{2} \quad (۳) \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$A + B + C = 180^\circ \xrightarrow{A=B+45^\circ} B + 45^\circ + B + C = 180^\circ \Rightarrow 2B + 45^\circ + C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow C = 180^\circ - (2B + 45^\circ) \Rightarrow \sin C = \sin(180^\circ - (2B + 45^\circ)) = \sin(2B + 45^\circ)$$

در رابطه پرسیده شده، به جای  $\cos A$  و  $\sin C$  قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} \cos A = \cos(B + 45^\circ) \\ \sin C = \sin(2B + 45^\circ) \end{cases}$$

$$2\cos A \sin B - \sin C = 2\cos(B + 45^\circ) \sin B - \sin(2B + 45^\circ)$$

$$= 2(\cos B \cos 45^\circ - \sin B \sin 45^\circ) \sin B - (\sin 2B \cos 45^\circ + \cos 2B \sin 45^\circ)$$

$$= 2\left(\cos B \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin B \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin B - \left(\sin 2B \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 2B \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2} \cos B \sin B - \sqrt{2} \sin^2 B - \frac{\sqrt{2}}{2} \underbrace{\sin 2B}_{2 \sin B \cos B} - \frac{\sqrt{2}}{2} \underbrace{\cos 2B}_{1 - 2 \sin^2 B}$$

$$= \sqrt{2} \cos B \sin B - \sqrt{2} \sin^2 B - \sqrt{2} \sin B \cos B - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \sin^2 B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴. اندازه زاویه B در مثلث ABC، ۲ برابر اندازه A است. حاصل  $2\sin A \cos B - \sin C$  با کدام مورد برابر

است؟

(ریاضی میسر ۱۴۰۱)



$$\sin A \quad (۴) \qquad \sin B \quad (۳) \qquad -\sin B \quad (۲) \qquad -\sin A \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$A + B + C = 180^\circ \xrightarrow{B=2A} 3A + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - 3A \Rightarrow \sin C = \sin(180^\circ - 3A) = \sin 3A$$

از طرفی:

$$\sin 3A = \sin(2A + A) = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$$

در رابطه پرسیده شده، به جای  $\cos B$  و  $\sin C$  قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} \cos B = \cos 2A \\ \sin C = \sin 3A = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A \end{cases}$$

$$2\sin A \cos B - \sin C = 2\sin A \cos 2A - (\sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A)$$

$$= \sin A \cos 2A - \sin 2A \cos A = \sin(A - 2A) = \sin(-A) = -\sin A$$



(ریاضی تیر ۱۴۰۳)

۵. در مثلث  $ABC$ ، اگر  $\tan(B - C) = \sqrt{3}$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{1 - 2\cos(B + C)}{4\sin B \cos C}$  کدام است؟

(۴)  $\tan C$

(۳)  $\tan B$

(۲)  $-\frac{1}{2}$

(۱)  $-1$

پاسخ: گزینه ۴

با فاکتورگیری از عدد ۲ در صورت کسر داریم:

$$\begin{aligned} \frac{2\left(\frac{1}{2} - \cos(B + C)\right)}{4\sin B \cos C} &= \frac{2(\cos 60^\circ - \cos(B + C))}{4\sin B \cos C} = \frac{2(\cos(B - C) - \cos(B + C))}{4\sin B \cos C} \\ &= \frac{\cos(B - C) - \cos(B + C)}{2\sin B \cos C} = \frac{(\cos B \cos C + \sin B \sin C) - (\cos B \cos C - \sin B \sin C)}{2\sin B \cos C} \\ &= \frac{2\sin B \sin C}{2\sin B \cos C} = \frac{\sin C}{\cos C} = \tan C \end{aligned}$$

تحصیل باما



(ریاضی تیر ۱۴۰۳)

۶. اگر  $3\sin^2 x + a\cos^2 x = 4$  باشد،  $\cot^2 x$  با کدام مورد برابر است؟

$$\frac{1}{3-a} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{a-3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4-a} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{a-4} \quad (۱)$$

روش ۱:

روش ۲: هوشمندانه

پاسخ (راه اول): گزینه ۱

$$3(1 - \cos^2 x) + a\cos^2 x = 4 \Rightarrow 3 - 3\cos^2 x + a\cos^2 x = 4 \Rightarrow (a - 3)\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{a - 3}$$

پس:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{a - 3} = \frac{a - 4}{a - 3}$$

$$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\frac{1}{a - 3}}{\frac{a - 4}{a - 3}} = \frac{1}{a - 4}$$

تحصیل باما

پاسخ (راه دوم): گزینه ۱

با تقسیم طرفین تساوی بر  $\cos^2 \alpha$  داریم:

$$\frac{3\sin^2 x + a\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{4}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{a\cos^2 x}{\cos^2 x} = 4 \times \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 3\tan^2 x + a = 4(1 + \tan^2 x) \Rightarrow 3\tan^2 x + a = 4 + 4\tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x = a - 4 \Rightarrow \cot^2 x = \frac{1}{a - 4}$$



## توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

یادآوری:

\* اتحاد مزدوج:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

مثال:

۱)  $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$

۲)  $(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}) = x^2 - x$

۳)  $(x-\sqrt{x+1})(x+\sqrt{x+1}) = x^2 - (x+1) = x^2 - x - 1$

۴)  $(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}) = (x+2) - (x-3) = 5$

(تجربی تیر ۱۴۰۳)

۷. اگر  $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-4} = 2$  باشد، حاصل عبارت  $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} - 2$  کدام است؟

$\frac{a}{2}$  (۴)

$\frac{a}{4}$  (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

تحصیل باما



## لگاریتم

یادآوری:

\* تعریف:

$$\log_b^a = c \Leftrightarrow b^c = a$$

مثال:

$$۱) \log_2^2 = ?$$

$$۲) \log_2^4 = ?$$

$$۳) \log_4^2 = ?$$

(تقریبی دی ۱۴۰۱)

۸. مقدار  $\log_n^m = a$  و مقدار  $\log_{mn}^{m^2n} = b$  است. اگر  $a > 0$  باشد، حاصل  $[b]$  چقدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$b = \log_{mn}^{m^2n} = \frac{\log_n^{m^2n}}{\log_n^{mn}} = \frac{\log_n^{m^2} + \log_n^n}{\log_n^m + \log_n^n} = \frac{2\log_n^m + 1}{\log_n^m + 1}$$

$$\Rightarrow b = \frac{2a+1}{a+1} = \frac{2(a+1)-1}{a+1} = \frac{2(a+1)}{a+1} - \frac{1}{a+1} = 2 - \frac{1}{a+1}$$

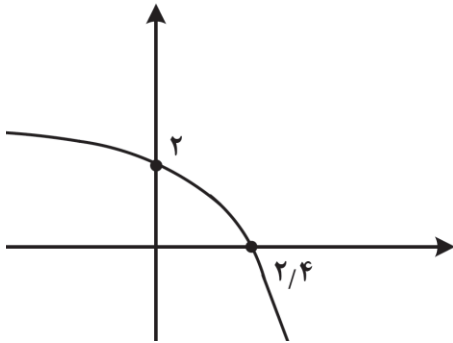
$$0 < a \Rightarrow 1 < a+1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{a+1} > 0$$

$$b = 2 - \frac{1}{a+1} = 2 - 0/ \sim = 1/ \sim \Rightarrow [b] = 1$$



(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۹. نمودار تابع  $y = c + \log_{\delta}(ax + b)$  به صورت زیر است. حاصل  $\frac{a}{b}$  کدام است؟



- (۱)  $-\frac{2}{5}$   
 (۲)  $-\frac{3}{5}$   
 (۳)  $-\frac{1}{10}$   
 (۴)  $-\frac{3}{10}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} f(0) = 2 \Rightarrow c + \log_{\delta}^b = 2 \\ f(2/4) = 0 \Rightarrow c + \log_{\delta}^{(2/4)a+b} = 0 \end{cases}$$

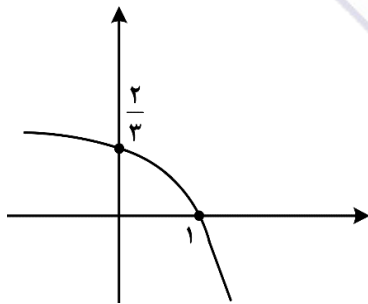
با تفاضل طرفین دو معادله داریم:

$$\log_{\delta}^b - \log_{\delta}^{(2/4)a+b} = 2 \Rightarrow \log_{\delta}^{\frac{b}{(2/4)a+b}} = 2 \Rightarrow \frac{b}{2/4a+b} = 2\delta \Rightarrow b = 6a + 2\delta b$$

$$\Rightarrow -24b = 6a \Rightarrow -2b = \delta a \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{2}{\delta}$$

(تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱۰. شکل زیر نمودار تابع  $f(x) = 1 + c \times 3^{a+bx}$  است. مقدار  $f(-1)$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{10}{9}$   
 (۲)  $\frac{8}{9}$   
 (۳)  $\frac{5}{3}$   
 (۴)  $\frac{7}{8}$

هوشمندانه

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} f(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + c \times 3^a = \frac{2}{3} \Rightarrow c \times 3^a = \frac{-1}{3} \\ f(1) = 0 \Rightarrow 1 + c \times 3^{a+b} = 0 \Rightarrow c \times 3^{a+b} = -1 \end{cases}$$

با تقسیم طرفین دو معادله داریم:

$$\frac{c \times 3^{a+b}}{c \times 3^a} = \frac{-1}{\frac{-1}{3}} \Rightarrow 3^b = 3 \Rightarrow b = 1$$

$$f(x) = 1 + c \times 3^{a+x} \longrightarrow f(-1) = 1 + c \times 3^{a-1} = 1 + c(3^a \times 3^{-1}) = 1 + c \times 3^a \times \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$



## پیوستگی

## یادآوری ۱:

برابری دو ضابطه در نقطه مرزی  $\rightarrow$  در توابع دو ضابطه  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  \*  
 (مقدار) = (حد)

## یادآوری ۲:

\* حضور براکت  $\leftarrow$  ناپیوستگی

۱۱. به ازای مقادیر طبیعی  $c$ ، تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} & |x| \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & |x| > c \end{cases}$  روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. کدام

می تواند مقدار  $\left[\frac{a}{b}\right]$  باشد؟

(ریاضی تیر ۱۴۰۳)

-۴ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} x = c: |c-1| = ac^2 + bc + 2 \xrightarrow{c \geq 1} c-1 = ac^2 + bc + 2 \\ x = -c: \underbrace{|-c-1|}_{|c+1|} = ac^2 - bc + 2 \xrightarrow{c \geq 1} c+1 = ac^2 - bc + 2 \end{cases}$$

$$2c = 2ac^2 + 4 \Rightarrow c = ac^2 + 2 \Rightarrow ac^2 = c - 2 \Rightarrow a = \frac{c-2}{c^2}$$

با جمع طرفین دو معادله داریم:

$$-2 = 2bc \Rightarrow -1 = bc \Rightarrow b = \frac{-1}{c}$$

با تفاضل طرفین دو معادله داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{c-2}{c^2}}{\frac{-1}{c}} = \frac{2-c}{c} = \frac{2}{c} - 1$$

نهایتاً داریم:

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{2}{c} - 1\right] = \left[\frac{2}{c}\right] - 1 = \begin{cases} 1 & c = 1 \\ 0 & c = 2 \\ -1 & c = 3, 4, \dots \end{cases}$$



(تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱۲. تابع ناصفر  $f(x) = b[x^2 - ax] - 2a$  در  $\mathbb{R}$  پیوسته است. مقدار  $\frac{a}{f(b)}$  کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲)  $-\frac{1}{4}$ (۱)  $-\frac{1}{2}$ 

هوشمندانه

(تجربی تیر ۱۴۰۳)

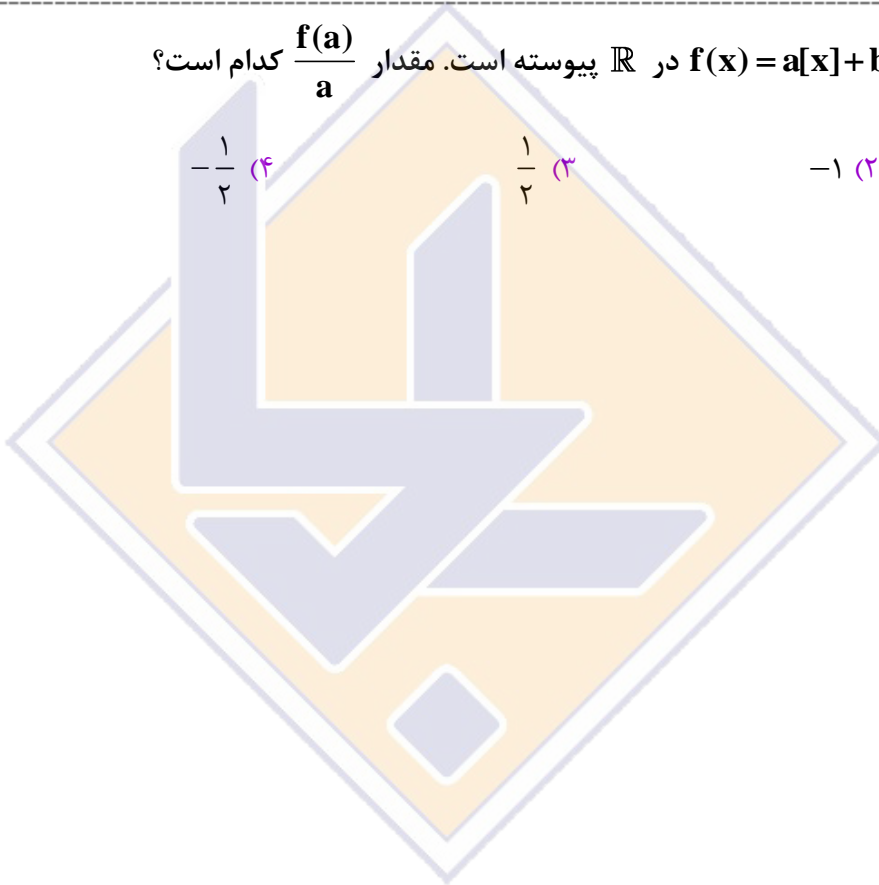
۱۳. تابع غیر صفر  $f(x) = a[x] + b[x+1]$  در  $\mathbb{R}$  پیوسته است. مقدار  $\frac{f(a)}{a}$  کدام است؟

(۴)  $-\frac{1}{2}$ (۳)  $\frac{1}{2}$ 

(۲) -۱

(۱) ۱

هوشمندانه



تحصیل باما





## کاربرد مشتق

پیش‌آوری!

\* نقطه گوشه:

(شیب‌های متفاوت)

(ریاضی تیر ۱۴۰۳)

۱۴. به ازای چند مقدار صحیح  $m$ ، تابع  $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x - a)^m & x \geq a \end{cases}$  دارای نقطه گوشه‌ای است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۲ بیش از ۲

۱) صفر

پاسخ: گزینه ۴

تنها نقطه گوشه ممکن،  $x = a$  است. برای این که این نقطه گوشه باشد، باید اولاً پیوسته باشد (که هست!) و ثانیاً مشتقات چپ و راست نابرابر داشته باشد:

$$\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f'(a) = m(x-a)^{m-1} = \begin{cases} 0 & m \geq 2 \\ 1 & m = 1 \\ \text{موجود نیست} & m < 1 \end{cases} \end{cases}$$

تحصیل باما



## دنباله حسابی و هندسی

یادآوری:

$$* a_n = a + (n - 1)d \quad \text{حسابی:}$$

$$* a_n = aq^{n-1} \quad \text{هندسی:}$$

۱۵. از اضافه کردن ۴ واحد به جملات اول و دوم یک دنباله حسابی، جملات اول و دوم دنباله حسابی جدید ساخته می‌شود. اختلاف جمله  $n$ ام دو دنباله کدام است؟

(تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۶ (۴)

۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

با اضافه کردن ۴ واحد به جملات اول و دوم، قدرنسبت ثابت می‌ماند. جمله عمومی دو دنباله را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a_n = a + (n - 1)d \\ b_n = (a + 4) + (n - 1)d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= ((a + 4) + (n - 1)d) - (a + (n - 1)d) \\ &= (a + 4) - (a) + (n - 1)d - (n - 1)d = 4 \end{aligned}$$

تحصیل باما



۱۶. در یک دنباله حسابی با جمله اول  $a$  و قدرنسبت  $d$ ، تساوی  $۶a^۲ = ۵a_۳a + ۳a_۲a$  برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به  $d$ ، کدام می‌تواند باشد؟

(تقریبی تیر ۱۴۰۲)

۴/۵ (۴)

۳/۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$۶(a+d)^۲ = ۵(a+۲d)a + ۳(a+d)a \Rightarrow ۶a^۲ + ۱۲ad + ۶d^۲ = ۵a^۲ + ۱۰ad + ۳a^۲ + ۳ad$$

$$\Rightarrow ۲a^۲ + ad - ۶d^۲ = ۰$$

با تقسیم طرفین رابطه بر  $d^۲$  داریم:

$$۲\left(\frac{a}{d}\right)^۲ + \left(\frac{a}{d}\right) - ۶ = ۰ \xrightarrow{\frac{a}{d}=t} ۲t^۲ + t - ۶ = ۰ \Rightarrow t = -۲, \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{a}{d} = \begin{cases} -۲ \\ ۳ \\ \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\frac{a_۴}{d} = \frac{a+۳d}{d} = \frac{a}{d} + ۳ = \begin{cases} -۲+۳=۱ \\ \frac{۳}{۲}+۳=۴/۵ \end{cases}$$

۱۷. در یک دنباله هندسی با جمله اول  $a$ ، تساوی  $\frac{a_۶}{a_۳} + \frac{a_۲}{a} = ۲$  برقرار است. نسبت  $a^۲$  به جمله دوم کدام می‌تواند باشد؟

(تقریبی خراج ۱۴۰۲)

$-\frac{۱}{۲}$  (۴)

$\frac{۱}{۲}$  (۳)

۲ (۲)

$-۲$  (۱)

تحصیل باما

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{aq^۵}{(aq)^۳} + \frac{aq}{a^۲} = ۲ \Rightarrow \frac{q^۲}{a^۲} + \frac{q}{a} = ۲ \Rightarrow \left(\frac{q}{a}\right)^۲ + \left(\frac{q}{a}\right) - ۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{\frac{q}{a}=t} t^۲ + t - ۲ = ۰ \Rightarrow t = -۲, ۱ \Rightarrow \frac{q}{a} = \begin{cases} -۲ \\ ۱ \end{cases}$$

$$\frac{a^۲}{a_۲} = \frac{a^۲}{aq} = \frac{a}{q} = \begin{cases} -۱ \\ ۲ \\ ۱ \end{cases}$$



### هندسه

۱۸. نقاط M و N به ترتیب برابر روی اضلاع AB و BC در مثلث ABC انتخاب شده‌اند. اگر  $2BN = 3NC$  و

مساحت مثلث ABC، ۳ برابر مساحت مثلث BMN باشد، مقدار  $\frac{BM}{AM}$  کدام است؟

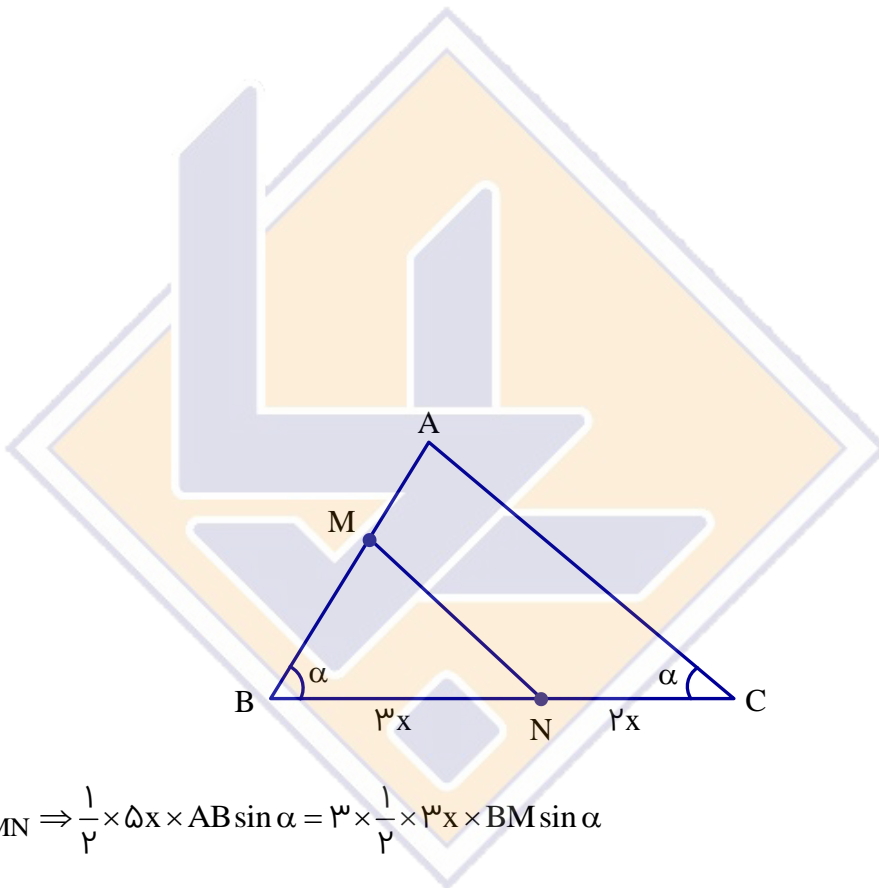
(تجربی تیر ۱۴۰۳)

۱/۴ (۴)

۱/۲۵ (۳)

۰/۸ (۲)

۰/۷۵ (۱)



پاسخ: گزینه ۳

$$S_{ABC} = 3S_{BMN} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 5x \times AB \sin \alpha = 3 \times \frac{1}{2} \times 3x \times BM \sin \alpha$$

$$\Rightarrow 5AB = 9BM \Rightarrow 5(BM + MA) = 9BM \Rightarrow 5BM + 5MA = 9BM \Rightarrow 5MA = 4BM$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{MA} = \frac{5}{4} = 1/25$$

تحصیل باما



## تابع وارون

یادآوری:

$$* (a,b) \in f \Leftrightarrow (b,a) \in f^{-1}$$



(تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱۹. اگر  $y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}$  ضابطه تابع وارون  $y = ax + a\sqrt{x}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

۹ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = ax + a\sqrt{x} = a(x + \sqrt{x}) = a\left(\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$f^{-1}(x) : x = a\left(\left(\sqrt{y} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{x}{a} = \left(\sqrt{y} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{y} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{1}{4}} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{4}\right) - \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{a} + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{1}{4}}$$

از مقایسه این ضابطه، با ضابطه  $y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2} = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{x}{4} + \frac{1}{4}}$  در صورت سؤال،  $a = 4$  به دست می‌آید.



(تجربی تیر ۱۴۰۳)



۲۰. اگر نقطه  $(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{5})$  روی تابع وارون تابع  $y = \frac{x}{a + a|x|}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

۳/۵ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

 $\frac{5}{27}$  (۱)

۲۱. به ازای کدام مقدار  $a$ ، نمودار تابع وارون تابع  $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$  خط  $10y - x = -10$  را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

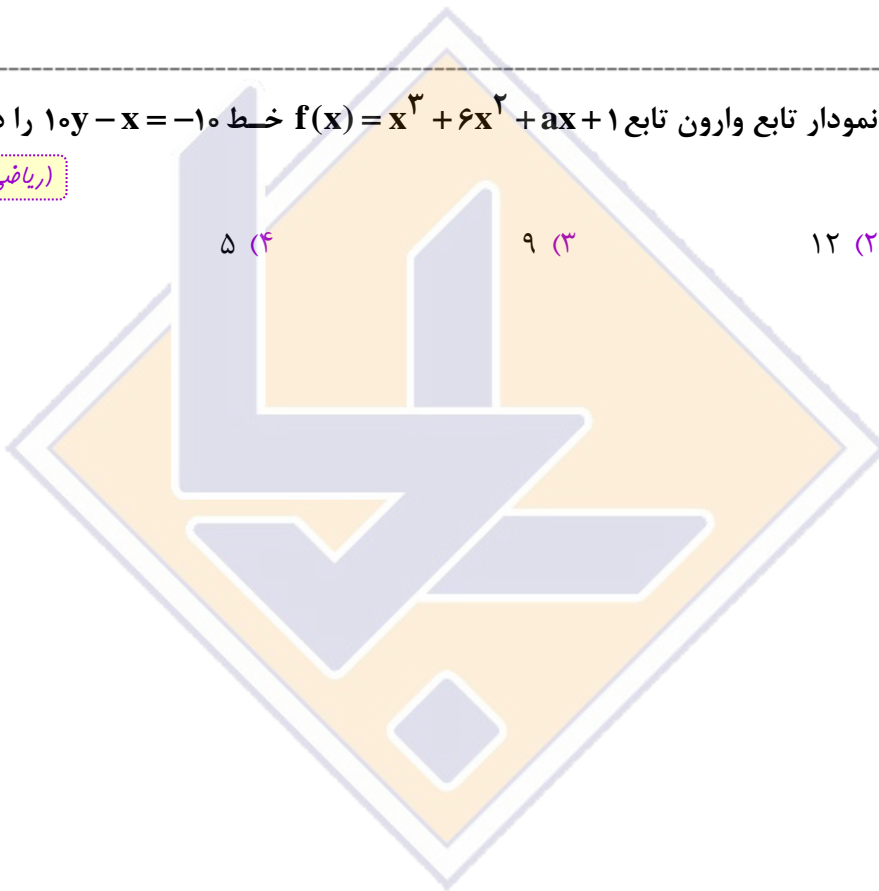
(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۵ (۴)

۹ (۳)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)



تحصیل باما



## استراتژی ۲

## دامنه تابع

یادآوری:

$$۱) \frac{\circ}{\circ} \rightarrow \circ \neq ۰$$

$$۲) \sqrt{\circ} \rightarrow \circ \geq ۰$$

$$۳) \log_{\square} \circ \rightarrow \begin{cases} \circ > ۰ \\ \square > ۰ \\ \square \neq ۱ \end{cases}$$

(تقریبی ۱۴۰۰)

۲۲. دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\log_4(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$  کدام است؟

$$۲) (-1, 2)$$

$$۱) (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

$$۴) (-2, 1)$$

$$۳) (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

پاسخ: گزینه ۱

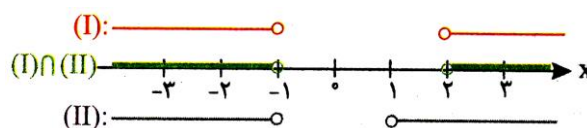
(۱) باید داخل  $\log$ ، مثبت باشد:

$$۰ < (x^2 - x - 2) \Rightarrow ۰ < (x+1)(x-2) \Rightarrow \boxed{x < -1 \text{ یا } 2 < x} \quad \text{(I)}$$

(۲) زیر رادیکال باید نامنفی باشد:

$$۰ \leq (x^2 - 1) \Rightarrow 1 \leq x^2 \Rightarrow \boxed{x < -1 \text{ یا } 1 < x} \quad \text{(II)}$$

اشتراک دو مجموعه (I) و (II) می شود مجموعه (II) که همان گزینه (۱) است.





(ریاضی ۱۴۰۰)

۲۳. دامنه تغییرات تابع  $f(x) = \log_{\epsilon} \frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|}$  کدام است؟

(۴)  $(-4, 4)$ (۳)  $(4, 9)$ (۲)  $(-4, 9)$ (۱)  $(-9, 9)$ 

زرنگ باش

پاسخ: گزینه ۱

(۱) برای محاسبه دامنه این تابع کافی است داخل  $\log$  را بزرگتر از صفر قرار دهیم:

$$0 < 6 + \sqrt{|x|} - |x|$$

(۲) به جای  $\sqrt{|x|} = t$  می‌گذاریم (پس حتماً  $t \geq 0$  است)

$$0 < 6 + t - t^2 \Rightarrow \underbrace{t^2 - t - 6}_{(t-3)(t+2)} < 0$$

$$\Rightarrow -2 < t < 3 \xrightarrow{\text{از طرفی } t \geq 0 \text{ است}} 0 \leq t < 3 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{|x|} < 3 \Rightarrow 0 \leq |x| < 9 \Rightarrow -9 < x < 9 \rightarrow \text{گزینه «۱»}$$

تحصیل باما





### نامعادلات و معادلات

(تبریزی ۹۹)

۲۴. مجموعه جواب نامعادله  $1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3$ ، کدام است؟

(۴) (۰/۸, ۲)

(۳) (۱, ۲)

(۲) (۰/۸, ۱/۲)

(۱) (۰/۶, ۱/۵)

روش ۲:

روش ۱:

پاسخ: گزینه ۴

$$1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3$$

هر یک از نامعادلات را جدا جدا حل می‌کنیم و در نهایت بین مجموعه جواب‌ها، اشتراک می‌گیریم.

$$1 < \frac{x+1}{2x-1} \Rightarrow 0 < \frac{x+1}{2x-1} - 1 \Rightarrow 0 < \frac{(x+1) - (2x-1)}{(2x-1)} \Rightarrow 0 < \frac{2-x}{2x-1} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} < x < 2} \quad (I)$$

$$\frac{x+1}{2x-1} \leq 3 \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{(x+1) - 3(2x-1)}{2x-1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{4-5x}{2x-1} < 0 \Rightarrow \boxed{x < \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{4}{5} < x} \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) = \left(\frac{4}{5}, 2\right)$$

(تبریزی خارج ۹۹)



تعمیل باما

۲۵. مجموعه جواب نامعادله  $-1 < \frac{2x-1}{x+1} < 3$ ، کدام است؟

(۴)  $\mathbb{R} - [-4, -1]$ (۳)  $\mathbb{R} - [-4, 0]$ (۲)  $(4, +\infty)$ (۱)  $(0, +\infty)$ 

روش ۲:

روش ۱:



(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۲۶. اگر  $f(x) = x^2 - [x]$  و  $f(af(\sqrt{5})) = 2$  باشد، کدام می تواند مقدار  $a$  باشد؟

$$-\frac{1}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$f(af(\sqrt{5})) = 2$$

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - [\sqrt{5}] = 5 - 2 = 3$$

$$f(3a) = 2 \Rightarrow (3a)^2 - [3a] = 2 \Rightarrow 9a^2 = 2 + [3a] \Rightarrow 9a^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 9a^2 = k \Rightarrow a^2 = \frac{k}{9} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{k}}{3} \Rightarrow$$

$$a = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{3}, \frac{-1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{-\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

تحصیل باما



### مثلات

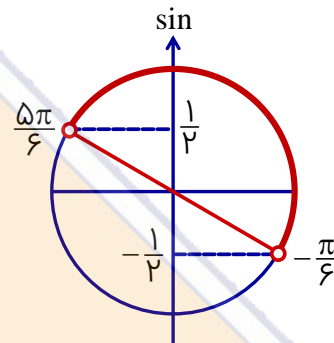
(تجربی فارغ ۱۴۰۱)

۲۷. اگر  $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$  و  $\sin 2x = \frac{m-1}{4}$  باشد، مجموعه مقادیر  $m$  کدام است؟

- (۱)  $(-1, 5)$       (۲)  $(-1, 5]$       (۳)  $(-1, 1)$       (۴)  $(-1, 1]$

پاسخ: گزینه ۲

$$-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6}$$



$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \sin 2x \leq 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \Rightarrow -2 < m-1 \leq 4 \Rightarrow -1 < m \leq 5$$

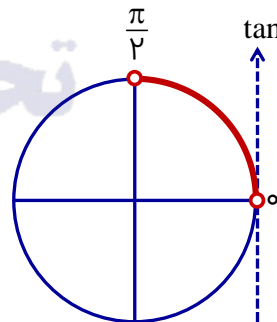
(تجربی ۱۴۰۱)

۲۸. اگر  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$  و  $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1-m}{2+m}$  باشد، مجموعه مقادیر  $m$  کدام است؟

- (۱)  $(-2, 1)$       (۲)  $(-2, 1]$       (۳)  $(-1, 2]$       (۴)  $(-1, 2)$

پاسخ: گزینه ۱

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} > -x > -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4} - x > 0$$



$$\Rightarrow 0 < \tan(\frac{\pi}{4} - x) < +\infty \Rightarrow 0 < \frac{1-m}{2+m}$$

	-2	1	
1-m	+	+	-
2+m	-	+	+
کل	-	+	-

$$\Rightarrow -2 < m < 1$$



۲۹. اگر  $\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \tan \alpha = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$  و  $\frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = -\frac{1}{\cot \alpha}$  باشد، انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه مثلثاتی

است؟

(تقریبی تیر ۱۴۰۳)

۴) اول

۳) دوم

۲) سوم

۱) چهارم

پاسخ: گزینه ۲

$$۱) \frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = -\frac{1}{\cot \alpha} \Rightarrow \frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = -\tan \alpha \Rightarrow \frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow |\sin \alpha| = -\sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \text{ ناحیه ۳ یا ۴}$$

$$۲) \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \tan \alpha = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|} \Rightarrow \frac{1}{|\cos \alpha|} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{|\cos \alpha|} + \frac{\sin \alpha}{|\cos \alpha|} \Rightarrow \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{|\cos \alpha|}$$

$$\Rightarrow |\cos \alpha| = -\cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \text{ ناحیه ۳}$$

تحصیل باما



## ریاضیات صفر

### اتحادهای

### 1 مربع کامل

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال:

$$(x - 4)^2 =$$

$$(5/1)^2 =$$

بلد باش!

- $x^2 \pm 2x + 1 = (x \pm 1)^2$
- $x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2$
- $x^2 \pm 6x + 9 = (x \pm 3)^2$
- $4x^2 \pm 4x + 1 = (2x \pm 1)^2$

### 2 مزدوج

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

مثال:

$$x^2 - 9 =$$

$$47^2 - 43^2 =$$

$$19/9 \times 20/1 =$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow$$

$$4x^2 - 1 = 0 \rightarrow$$

تحصیل باما



3 مکعب کامل

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مثال:

$$(x - 2)^3 =$$

$$(1/9)^3 =$$

بلد باش!

$$\bullet x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

$$\bullet x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$$

$$\bullet x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$$

$$\bullet x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

4 چاق و لاغر

مثال:

$$x^3 + 1 =$$

$$x^3 - 8 =$$

تحصیل باما



### گویا کردن مخرج کسرها

\* ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج یا چاق مخرج!

مثال: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$$

### توان و ریشه

\* قوانین:

$$۱) (a^n)^m = (a^m)^n = a^{mn}$$

$$۲) a^n \times a^m = a^{n \pm m}$$

$$۳) a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad \sqrt[n]{a^n} = \left\{ \begin{array}{l} a \text{ اگر } n \text{ زوج باشد} \\ |a| \text{ اگر } n \text{ فرد باشد} \end{array} \right.$$

$$۱) \sqrt[n]{m\sqrt{a}} = mn\sqrt{a}$$

$$۲) \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$$



## سوتی نامه!

\* ۲۰ سوتی رایج:

شکل درست محاسبه	محاسبه غلط دانش آموز!	عملیات مورد نظر
$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \rightarrow a + b + 2\sqrt{ab}$	$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b$	جملات یک بسته‌ی چند جمله‌ای را تک تک به توان نرسانید، مگر این که بین آن‌ها ضرب باشد: $(ab)^n = a^n b^n$
$(a - b^2) \rightarrow a^2 + b^2 - 2ab^2$	$(a - b^2)^2 = a^2 - b^4$	جواب جذر عدد مثبت، هیچ‌گاه منفی نمی‌شود. اگر از عدد مجهول جذر گرفتید، حتماً قدر مطلق بگذارید!
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{9} = \pm 3$	وقتی زیر رادیکال، مجموع چند عبارت باشد، حق ندارید تک تک جذر بگیرید، مگر اینکه بین آن‌ها ضرب باشد ...
$\sqrt{x^2} =  x $ $x^2 = 9 \rightarrow  x  = 3 \Rightarrow x \pm 3$	$\begin{cases} \sqrt{x^2} = x \\ x^2 = 9 \rightarrow x = 3 \end{cases}$	وقتی زیر رادیکال، مجموع چند عبارت باشد، حق ندارید تک تک جذر بگیرید، مگر اینکه بین آن‌ها ضرب باشد ...
اول $4 + x^2$ را حساب کرده، بعد جذر می‌گیریم.	$\sqrt{4 + x^2} = 2 + x$	وقتی عددهای توانی با توان برابر یا پایه‌ی یکسان، جمع و منها شده باشند، حاصلشان فرمولی ندارد؛ تک تک حساب کن.
$2^3 + 2^5 = 8 + 32 = 40$	$2^3 + 2^5 = 2^8$	ضرب عدد توانی در عدد غیر توانی، فرمولی ندارد!
$5^4 - 2^4 = 625 - 16 = 609$	$5^4 - 2^4 = 3^4$	اگر منفی، پشت عبارتی قرار دارد، حتماً پرانتز بگذارید، به خصوص وقتی مخرج مشترک می‌گیرید و بین دو کسر، منها وجود دارد! در ضمن منهای پشت پرانتز مال همه‌ی عامل‌های داخل پرانتز است ...
$3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$	$3 \times 2^5 = 6^5$	اگر از دو طرف تساوی عددی را که جمع یا منها شده خط می‌زنید، به جایش صفر بگذارید ...
$x - \frac{x-1}{x} = \frac{x^2 - (x-1)}{x}$	$x - \frac{x-1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$	عدد مشترکی را که در صورت و مخرج جمع یا منها شده، نمی‌توانید ساده کنید، مگر آن که بین همه‌ی عامل‌ها ضرب باشد ...
$3x - (x+1) = 3x - x - 1$	$3x - (x+1) = 3x - x + 1$	کسری را که مخرجش جمع یا تفاضل چند عدد یا عبارت است، نمی‌توانید از طریق مخرجش تفکیک کنید؛ تفکیک کسر فقط از راه صورت آن است.
$x^2 + \cancel{x} = \cancel{x} \Rightarrow x^2 = 0$	$x^2 + \cancel{x} = \cancel{x} \Rightarrow x^2 = 1$	کسری را که مخرجش جمع یا تفاضل چند عدد یا عبارت است، نمی‌توانید از طریق مخرجش تفکیک کنید؛ تفکیک کسر فقط از راه صورت آن است.
$\frac{x^2 + x + 1}{x} \rightarrow x + 1 + \frac{1}{x}$	$\frac{x^2 + \cancel{x} + 1}{\cancel{x}} = x^2 + 1$	
$\frac{x(x-1) + 1}{x} = \frac{x^2 - x + 1}{x}$	$\frac{\cancel{x}(x-1) + 1}{\cancel{x}} = (x-1) + 1 = x$	
$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$	$\frac{x}{x+1} = \frac{x}{x} + \frac{x}{1} = 1 + x$	





$x^2(x-9) = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x-9 = 1 \end{cases}$	$x^2(x-9) = x^2 \Rightarrow x-9 = 1$	<p>اگر در یک معادله که بین همگی عامل‌های آن ضرب وجود دارد، عبارتی را از دو طرف تساوی خط زدید، حتماً آن عبارت را مساوی صفر بگذارید و ریشه‌های حاصل را در نظر بگیرید.</p>
$\frac{0/2}{0/17} = \frac{0/20}{0/17} = \frac{20}{17}$	$\frac{0/2}{0/17} = \frac{2}{17}$	<p>اگر می‌خواستید ممیزها را از صورت و مخرج کسر خط بزنید، دقت کنید که تعداد اعشارها یکسان باشد.</p>
$\frac{3x-1}{x-1} > 1 \Rightarrow \frac{3x-1}{x-1} - 1 > 0$ <p>ساده کردن و تعیین علامت →</p>	$\frac{3x-1}{x-1} > 1 \Rightarrow 3x-1 > x-1$	<p>در نامعادله‌ها وقتی از علامت عبارتهای مجهول خبر ندارید، حق طرفین وسطین، معکوس کردن و ضرب عدد در طرفین را ندارید! فقط همه را بیاورید یک طرف و تعیین علامت کنید ...</p>
$x^2 - 2x + 3 = 0$ <p>اصلاً ریشه ندارد → <math>\Delta &lt; 0</math></p>	$x^2 - 2x + 3 = 0$ $\begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \end{cases}$	<p>در معادله‌ی درجه‌ی دو، هر جا سخن از <math>S</math> و <math>P</math> است، نام <math>\Delta &gt; 0</math> می‌درخشد.</p>
$\log(a \times b) = \log a \pm \log b$	$\log(a \pm b) = \log a \times \log b$	<p>لگاریتم ضرب (تقسیم) برابر با جمع (تفریق) لگاریتم‌هاست، نه برعکس!</p>
$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4}$	<p>وقتی کمان به صورت مجموع یا تفاضل دو عدد باشد، حق ندارید نسبت مثلثاتی را برای تک تک آن‌ها حساب کنید، اول باید کمان را ساده کنید ...</p>
$\cos^2(\sqrt{x}) = (\cos \sqrt{x})^2$ <p>اینم حالت کلی:</p> $\sin^n \alpha = (\sin \alpha)^n, \cos^n \alpha = (\cos \alpha)^n$	$\cos^2(\sqrt{x}) = \cos x$	<p>توان بالای نسبت‌های مثلثاتی، مال کمان نیست! باید اول نسبت مثلثاتی کمان را حساب کنید و بعد به توان برسائید ...</p>
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$	<p>اگر کمان، ضریب داشت، ضریب مال نسبت مثلثاتی نخواهد بود!</p>
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	$\cos \alpha = k \Rightarrow \cos 2\alpha = 2k$	<p>اگر کمان <math>n</math> برابر شد، نسبت مثلثاتی <math>n</math> برابر نمی‌شود.</p>
<p>در محاسبه عبارتهای مثلثاتی، اولویت همیشه ساده کردن و محاسبه‌ی کمان است. بعد از آن نسبت مثلثاتی را حساب می‌کنیم و در آخر هم به توان می‌رسانیم.</p>		
<p>در کلیه‌ی نامعادلات و معادلات، پس از به دست آوردن جواب‌ها باید به دامنه توجه کرد.</p>		