



ویژه کنکور ۱۴۰۴

مثلات

مهندس آریان حیدری

 Arianheidarii

 Arianheidarii

 Arian.heidarii



مقدماتی

(الف)

واحدهای زاویه: رادیان و درجه: $57^\circ \approx 60^\circ$

$\frac{\pi}{10} \rightarrow$

$\frac{\pi}{12} \rightarrow$ یا $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}) =$

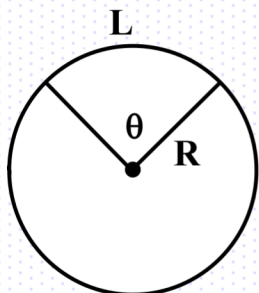
$20^\circ \rightarrow$ یا $\frac{1}{4}(60^\circ) =$

$22/5^\circ = \frac{1}{4}(45^\circ) =$

تبدیل زوایا

(۱) $\pi \rightarrow 180^\circ$
(۲) تبدیل به نسبتی از زوایای معروف

رابطه بین زاویه، طول کمان (مسافت طی شده) و شعاع دایره



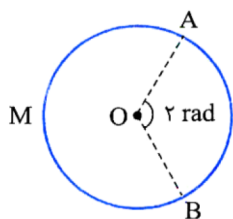
$\Rightarrow L = \theta \times R$

خطرا!

۱. با توجه به شکل زیر و با فرض $\pi = 3/14$ ، طول کمان AMB برابر ۱۲/۸۴ است. مساحت دایره کدام است؟ (O)

(نردباز ۴ فیلی سبز)

مرکز دایره است.)



(۱) 4π

(۲) $6/25\pi$

(۳) 9π

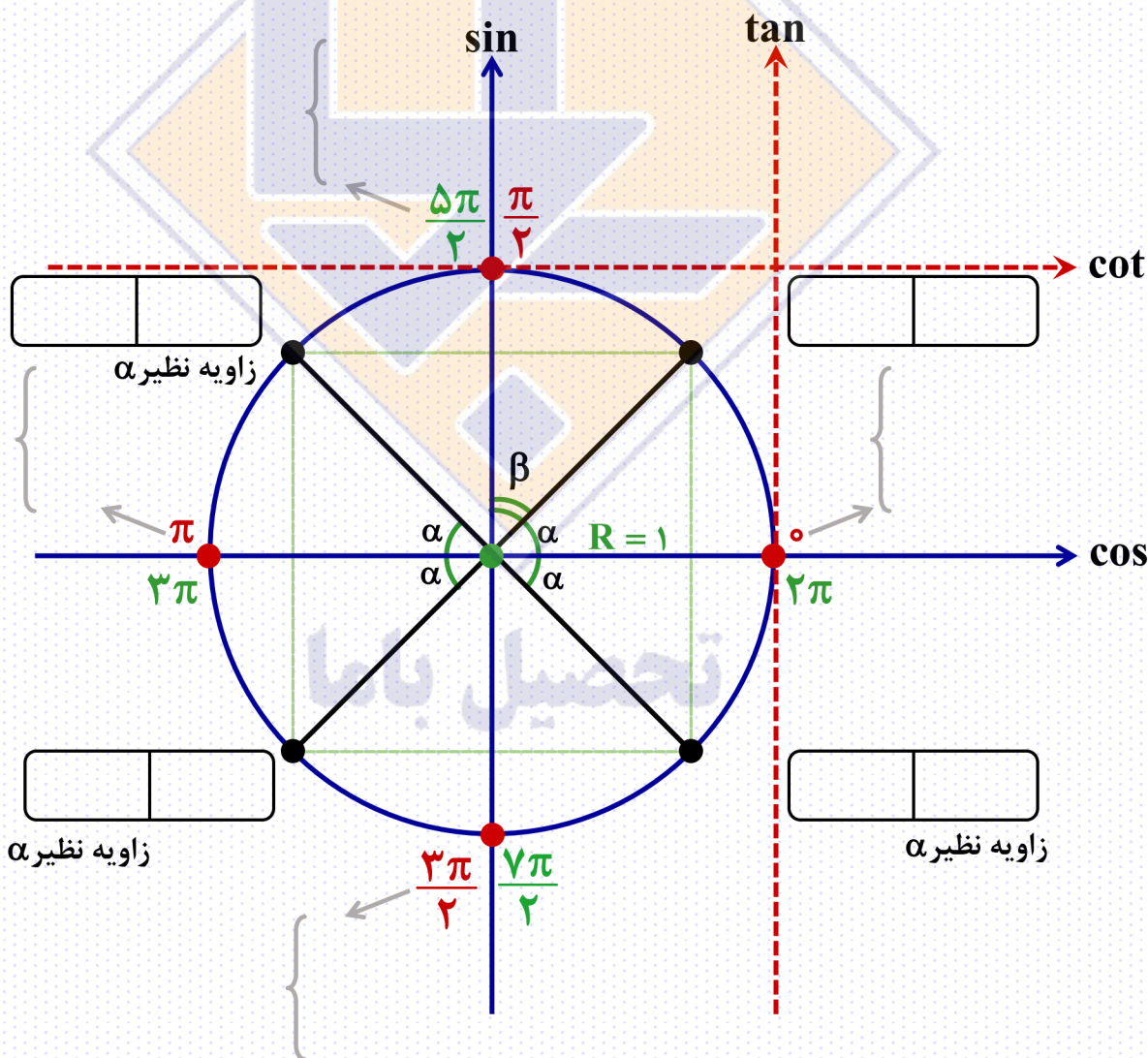
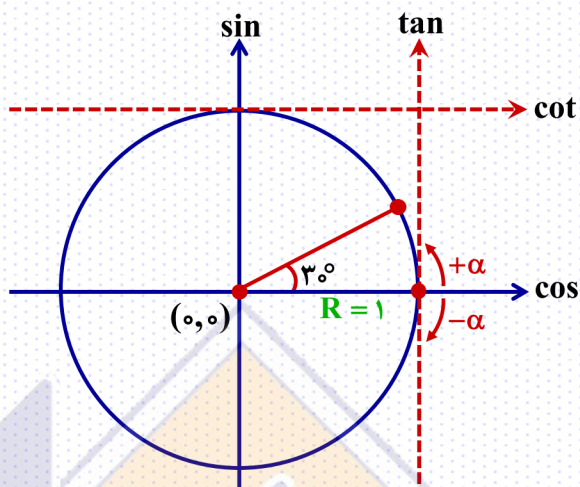
(۴) $12/25\pi$

خطرا!



(ب)

دایره ی مثلثاتی:



* تعیین علامت ؟



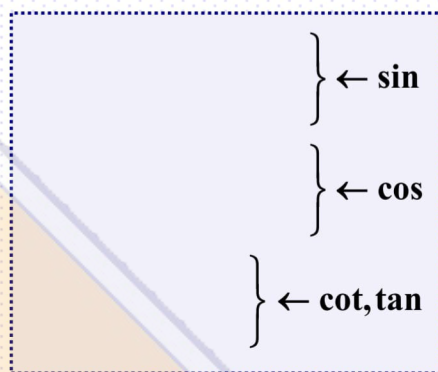
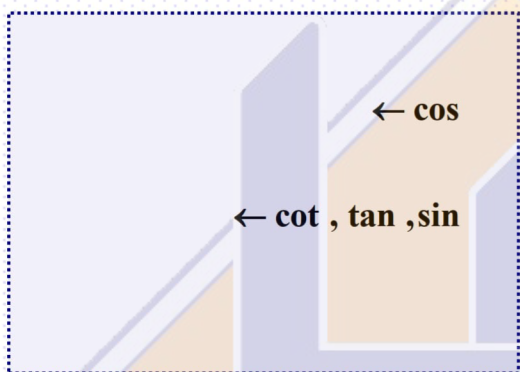
* مثال: مقایسه ربع ۱ و ۲؟

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = \\ \cos(-\alpha) = \\ \tan(-\alpha) = \\ \cot(-\alpha) = \end{cases}$$

* مثال: مقایسه ربع ۱ و ۴؟ ←

نحوه برخورد توابع مثلثاتی با منفی!!

تعیین علامت حرفه‌ای مثلثاتی:



۲. اگر $\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \tan \alpha = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$ و $\frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = -\frac{1}{\cot \alpha}$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی

(تجربی تیر ۱۴۰۳)

است؟

- (۱) چهارم (۲) سوم (۳) دوم (۴) اول

$$\frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = -\frac{1}{\cot \alpha} \Rightarrow \frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = -\tan \alpha \Rightarrow \frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow |\sin \alpha| = -\sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \text{ ناحیه ۳ یا ۴}$$

تحصیل باما

روش ۱:

ترفند

روش ۲:

$$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \tan \alpha = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|} \Rightarrow \frac{1}{|\cos \alpha|} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{|\cos \alpha|} + \frac{\sin \alpha}{|\cos \alpha|} \Rightarrow \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{|\cos \alpha|}$$

$$\Rightarrow |\cos \alpha| = -\cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \text{ ناحیه ۳}$$



۳. فرض کنید برد تابع $f(x) = \sqrt[3]{9\cos^2(x)-1} - \sqrt[3]{1-9\cos^2(x)}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b - a$ ،

کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۰)

$\frac{21}{4}$ (۴)

$\frac{9}{2}$ (۳)

$\frac{15}{4}$ (۲)

$\frac{9}{4}$ (۱)

ترفند

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} - \sqrt[3]{1 - 9\cos^2 x}$$

$$R_f = [a, b] \Rightarrow b - a = ?$$

۱) اگر دقت کنیم، توان‌ها قرینه همانند پس عبارت‌های نمایی داده شده معکوس یکدیگرند. یعنی اگر یکی را t

$$\sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} = t \Rightarrow \sqrt[3]{1 - 9\cos^2 x} = \frac{1}{t}$$

بگیریم، دیگری $\frac{1}{t}$ می‌شود:

$$f(t) = t - \frac{1}{t}$$

پس به جای این که برد تابع $f(x)$ را به دست آوریم. برد تابع $f(t)$ را محاسبه می‌کنیم:

در این تست $\sqrt[3]{9\cos^2 x - 1}$ را t گرفته‌ایم. بلافاصله از روی تغییرات متغیر x باید محدوده تغییرات متغیر t را محاسبه کنیم و برد تابع $f(t) = t - \frac{1}{t}$ را بر حسب دامنه متغیر t محاسبه کنیم:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 9\cos^2 x \leq 9$$

$$\Rightarrow -1 \leq 9\cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} \leq 2$$

بنابراین به جای محاسبه برد تابع $f(x)$ ، برد تابع $f(t)$ را در محدوده $\frac{1}{2} \leq t \leq 4$ حساب می‌کنیم:

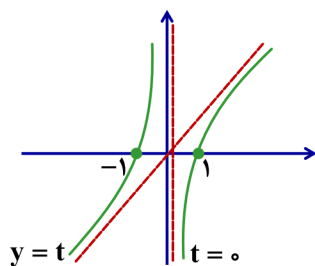
۲) نمودار تابع $f(t) = t - \frac{1}{t}$ دارای مجانب قائم $t = 0$ (ریشه مخرج)

و مجانب مایل $y = t$ (در بی‌نهایت $\frac{1}{t}$ هم‌ارز صفر می‌شود و $f(t)$ هم‌ارز t می‌شود) است.

همچنین تابع $f(t) = t - \frac{1}{t}$ یا همان $f(t) = \frac{t^2 - 1}{t}$ محور t ها را در دو نقطه $t = \pm 1$ قطع

می‌کند (در ضمن تابع $f(t)$ فرد است و نسبت به مبدأ مختصات متقارن می‌باشد).

و نمودار آن به صورت روبه‌رو است:



۳) همانطور که مشاهده می‌شود تابع $f(t)$ در بازه محدود $[\frac{1}{2}, 4]$ اکیداً صعودی است. پس:

$$\frac{1}{2} \leq t \leq 4 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(t) \leq f(4) \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq f(t) \leq \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow R_f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right] \Rightarrow b - a = \frac{15}{4} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4} \Rightarrow \text{گزینه ۴ صحیح است.}$$



(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۴. فرض کنید $[a, b]$ برد تابع $f(x) = 2^{-\sqrt{5\sin^2(x)-1}}$ باشد. مقدار $a + b$ ، کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

خطرا!

پاسخ: گزینه ۴
(۱)

$$f(x) = 2^{-\sqrt{5\sin^2(x)-1}}$$

تو این تست به جای $-\sqrt{5\sin^2(x)-1}$ متغیر t می‌گذاریم. حالا باید اول حدود تغییرات t رو به دست بیاریم:

$$\sin^2 x \leq 1$$

$$0 \leq 5\sin^2 x \leq 5$$

$$-1 \leq 5\sin^2 x - 1 \leq 4$$

$$0 \leq \sqrt{5\sin^2 x - 1} \leq 2$$

$$-2 \leq -\sqrt{5\sin^2 x - 1} \leq 0$$

(۲) حالا کافیه برد تابع $y = 2^t$ رو با دامنه $t \in [-2, 0]$ به دست بیاریم:

$$-2 \leq t \leq 0 \xrightarrow{\text{تابع } 2^t \text{ صعودیه}} 2^{-2} \leq 2^t \leq 2^0 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq y \leq 1$$

پس برد تابع بازه $[\frac{1}{4}, 1]$ است یعنی $a = \frac{1}{4}$ و $b = 1$ پس:

$$a + b = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

تحصیل باما

(IQ کج)

۵. بیشترین مقدار $A = 5\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)



۶. حدود تغییرات تابع $y = \sin x$ وقتی $30^\circ \leq x \leq 120^\circ$ است، را بیابید.

ترفند

خطرا!

۷. اگر $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ و $\sin 2x = \frac{m-1}{4}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

- (۱) $(-1, 5)$
- (۲) $(-1, 5]$
- (۳) $(-1, 1)$
- (۴) $(-1, 1]$

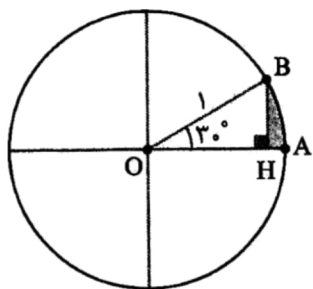
روش ۱:

تحصیل باما

روش ۲:



(مهروماه)



۸. در شکل روبه‌رو، محیط قسمت سایه‌زده کدام است؟

$\frac{12 - 3\sqrt{3} + \pi}{6}$ (۲)

$\frac{3 - \sqrt{3} + \pi}{6}$ (۱)

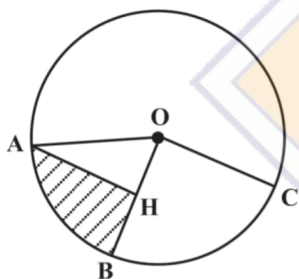
$\frac{9 - 3\sqrt{3} + \pi}{6}$ (۴)

$\frac{6\sqrt{3} + \pi}{6}$ (۳)

۹. مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به محیط 2π و AH عمود منصف OB است. محیط قسمت هاشور خورده چقدر از

محیط مثلث OAH بزرگ‌تر است؟

(تهرانی فارغ ۱۴۰۲)



$\frac{2\pi - 1}{3}$ (۱)

$\frac{2\pi - 3}{6}$ (۲)

$\frac{\pi - 1}{6}$ (۳)

$\frac{\pi - 3}{3}$ (۴)

زنگ باش!

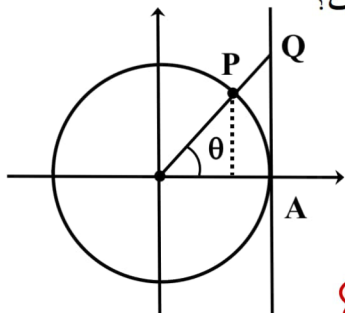
تحصیل باما

یادآوری زوایای 30° و 60° در مثلث قائم‌الزاویه:





۱۰. در دایره‌ی مثلثاتی روبرو، اگر مختصات p به صورت $(\sin a, 1 - a)$ باشد، AQ کدام است؟



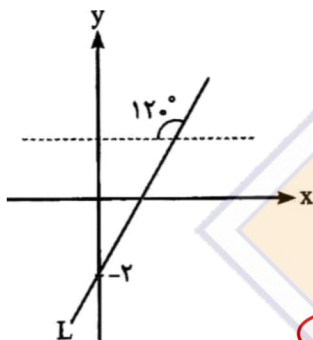
- (۱) $\frac{12}{5}$
- (۲) $\frac{5}{12}$
- (۳) $\frac{13}{5}$
- (۴) $\frac{13}{12}$

1 $\tan \alpha = AQ$

2 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$

(کتاب درسی)

۱۱. با توجه به شکل روبرو، معادله خط L کدام است؟

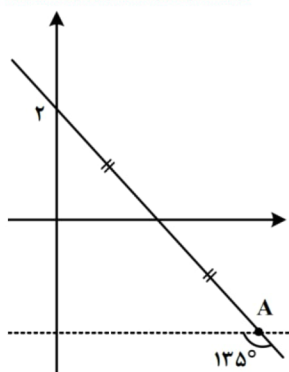


- (۱) $y + 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}x$
- (۲) $y - 2 = \sqrt{3}x$
- (۳) $y + 2 = \sqrt{3}x$
- (۴) $y - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

3 $\tan \alpha = \text{شیب خط}$
↓
زاویه با جهت + محور x ها

(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱۲. در شکل زیر، فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟



- (۱) $2\sqrt{5}$
- (۲) $3\sqrt{6}$
- (۳) $4\sqrt{3}$
- (۴) $5\sqrt{2}$

تحصیل باما

۱۳. خط $2mx + (m^2 - 1)y = 3$ ، به ازای دو مقدار m با جهت مثبت محور x ها زاویه ۶۰ درجه می‌سازد. اختلاف

(تقریبی دی ۱۴۰۱)

مقادیر m کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$
- (۲) $4\sqrt{3}$
- (۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- (۴) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

خطرا!



(ج)

۱) اندازه:

مضارب زوج π ...

$\pi \leftarrow$ جنس رو عوض ...

مضارب زوج $\frac{\pi}{2}$...

$\frac{\pi}{2} \leftarrow$ جنس رو عوض ...

نسبت‌های مثلثاتی مرتبط با مضارب فرد π و $\frac{\pi}{2}$:

۲) علامت: با توجه به ربع قرارگیری، تعیین علامت کن.

۱) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

خطرا!

۵) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$

خطرا!

۲) $\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$

۶) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$

۳) $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$

۷) $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$

۴) $\cot(4\pi - \alpha) = \cot \alpha$

۸) $\cot\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \tan \alpha$

خطرا!

نتیجه: برای دوزاویه متمم \square و \circ داریم:

$\sin \circ =$

$\cos \circ =$

$\tan \circ =$

$\cot \circ =$

تحصیل با ما

مثال کاربردی:

۱) $\sin(15^\circ) =$

$180 + 45$

۳) $\tan(225^\circ) = \tan 45^\circ = 1$

$90 + 60$

۲) $\cos(15^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴) $\cot(330^\circ) =$





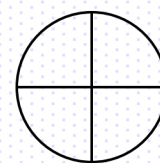
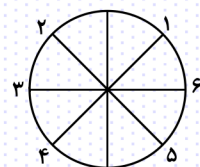
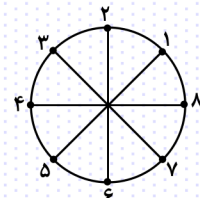
مثال کاربردی ۲:

۱) $\sin \frac{7\pi}{6} =$

۲) $\cos\left(\frac{-43\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{43\pi}{4}\right) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$

۳) $\tan\left(\frac{-26\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{26\pi}{3}\right) \rightarrow \sqrt{3} \rightarrow$

۴) $\cot\left(-\frac{76\pi}{6}\right) =$



خطر!

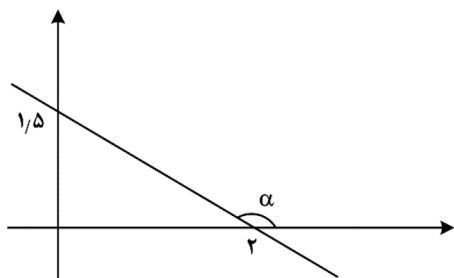
روش ویژه آریان حیدری برای تعیین نسبت‌های مثلثاتی مضارب صحیح زوایای معروف رادیانی:

اندازه ← ضریب رو ننگر!

علامت ← ضریب رو بنگر! و با توجه به ربع قرارگیری، تعیین علامت کن.

(تقریبی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱۴. در شکل زیر، زاویه α مشخص شده است. مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ کدام است؟



- ۱) ۳/۴
۲) ۴/۳
۳) ۳/۴
۴) ۴/۳



۱۵. حاصل عبارت $\tan(300)\cos(210) + \tan(480)\sin(840)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

(تقریبی ۹۹)

- ۲ (۴)
- ۱ (۳)
- صفر (۲)
- ۱/۲ (۱)

۱۶. حاصل عبارت $\frac{3\cos(248^\circ) - 2\sin(158^\circ)}{\sin(202^\circ) - \cos(292^\circ)}$ کدام است؟

(تقریبی اردیبهشت ۱۴۰۳)

- ۲/۵ (۴)
- ۲/۵ (۳)
- ۰/۵ (۲)
- ۰/۵ (۱)

۱۷. حاصل عبارت $\sin(\frac{17\pi}{3})\cos(\frac{-17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4})\sin(\frac{-11\pi}{6})$ کدام است؟

(تقریبی ۹۸)

- ۱/۲ (۴)
- ۱/۴ (۳)
- ۱/۲ (۲)
- ۱/۴ (۱)

تحصیل باما

پاسخ: گزینه ۳

$$\sin(\frac{17\pi}{3})\cos(\frac{-17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4})\sin(\frac{-11\pi}{6})$$

cos منفی خوار و sin منفی را از خود عبور می‌دهد

$$\rightarrow \sin(\frac{17\pi}{3})\cos(\frac{17\pi}{6}) - \tan(\frac{19\pi}{4})\sin(\frac{11\pi}{6})$$

$$= \sin(6\pi - \frac{\pi}{3})\cos(2\pi + \frac{5\pi}{6}) - \tan(4\pi + \frac{3\pi}{4})\sin(2\pi - \frac{\pi}{6})$$

مضارب زوج π قابل حذفاند

$$\rightarrow \sin(-\frac{\pi}{3})\cos(\frac{5\pi}{6}) - \tan(\frac{3\pi}{4})\sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$(\frac{-\sqrt{3}}{2})(\frac{-\sqrt{3}}{2}) - (-1)(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



فرمول‌های مثلثاتی

$$۱) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = ۱$$

$$۲) (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = ۱ \pm ۲ \sin \alpha \cos \alpha$$

$$۳) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = ۱ - ۲ \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$۴) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = ۱ - ۲ \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$۵) \tan \alpha \cot \alpha = ۱$$

$$۶) \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{۱}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$۷) ۱ + \tan^2 \alpha + ۱ = \frac{۱}{\cos^2 \alpha}$$

$$۸) ۱ + \cot^2 \alpha = \frac{۱}{\sin^2 \alpha}$$

$$۹) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$۱۰) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$۱۱) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$۱۲) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$



$$۱۳) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$۱۴) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha)$$

$$۱۵) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$۱۶) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$۱۷) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

$$۱۸) \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

$$۱۹) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$۲۰) (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha$$

$$۲۱) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$۲۲) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{3}{8} \sin^2 2\alpha$$

$$۲۳) \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$



$$۲۴) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$۲۵) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$۲۶) \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$۲۷) \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$۲۸) \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$۲۹) \cot \alpha - \tan \alpha = 2\cot 2\alpha$$

$$۳۰) \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$۳۱) \sin 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$۳۲) \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$۳۳) \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$۳۴) \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$۳۵) \tan 3\alpha = \frac{3\tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3\tan^2 \alpha}$$

* فرمول‌های ۹ الی ۱۸ و ۳۳ الی ۳۵ ویژه رشته ریاضی هستند.



مثلات ویژه به سبک آریان حیدری

۱: \odot یه فریبزی، بی زاویه

مثال: ساده‌ی شده‌ی عبارت $\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)} + \frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ ، کدام است؟

۲: \odot یه فریبزی، با زاویه

مثال: اگر $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{36}\right)$ ، کدام است؟

۳: \odot دو فریبزی، تابلو

مثال: اگر $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، حاصل $\frac{\sin^3 \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}$ کدام است؟

تحصیل باما

۴: \odot دو فریبزی، ناتابلو

مثال: اگر $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ ، کدام است؟



(ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

۱۸. حاصل عبارت $\frac{\sin^4 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\cos 2\alpha$ (۴) $\sin 2\alpha$

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \cos^2 \alpha)^2 + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{(1 - \sin^2 \alpha)^2 + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{(1 - 2 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{(1 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{\cos^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + 1}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + 1}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{(\cos^2 \alpha + 1)^2}{\cos^2 \alpha + 1} - \frac{(\sin^2 \alpha + 1)^2}{\sin^2 \alpha + 1} \\ &= (\cos^2 \alpha + 1) - (\sin^2 \alpha + 1) \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \end{aligned}$$

(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱۹. ساده‌ی شده‌ی عبارت $\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} + \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ کدام است؟

- (۱) $\cos(\frac{\theta}{2})$ (۲) $\sin(\frac{\theta}{2})$ (۳) $2 \cot(\frac{\theta}{2})$ (۴) $2 \tan(\frac{\theta}{2})$

زنگ باش!

پاسخ: گزینه ۳

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \rightarrow \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \Rightarrow 1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta \rightarrow 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta \rightarrow 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

پس داریم:

$$\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} + \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$



(تپیری فارغ ۹۸)

۲۰. اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $(\frac{1}{\sin x} - \sin x) \cdot \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ ، کدام است؟

- (۱) $-\cos^2 x$
- (۲) $-\cos x$
- (۳) $\cos^2 x$
- (۴) $\cos x$

خطرا!

خطرا!

زرتگ باش!

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \cdot \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{|\cos x|}} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

$$= -\sin x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

(رشته ریاضی) (سنجش ۸۷)

۲۱. اگر $A - B = \frac{\pi}{6}$ باشد، حاصل $\frac{2\sin(A+B) - 1}{4\cos A \cos B}$ کدام است؟

- (۱) $\tan B$
- (۲) $\tan A$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) 1

خطرا!

خطرا!

تحصیل باما

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{2\sin(A+B) - 1}{4\cos A \cos B} = \frac{2(\sin(A+B) - \frac{1}{2})}{4\cos A \cos B} \quad \sin(A-B) = \frac{1}{2} \quad \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{2\cos A \cos B} = \frac{2\sin B \cos A}{2\cos A \cos B} = \tan B$$

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A - (\sin A \cos B - \sin B \cos A)$$



۲۲. اندازه زاویه A در مثلث ABC، ۴۵ درجه بیشتر از اندازه زاویه B است، حاصل $2\cos A \sin B - \sin C$ کدام است؟

(ریاضی ۱۴۰۱)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$A + B + C = 180^\circ \xrightarrow{A=B+45^\circ} B + 45^\circ + B + C = 180^\circ \Rightarrow 2B + 45^\circ + C = 180^\circ$

$\Rightarrow C = 180^\circ - (2B + 45^\circ) \Rightarrow \sin C = \sin(180^\circ - (2B + 45^\circ)) = \sin(2B + 45^\circ)$

در رابطه پرسیده شده، به جای $\cos A$ و $\sin C$ قرار می‌دهیم:

$\begin{cases} \cos A = \cos(B + 45^\circ) \\ \sin C = \sin(2B + 45^\circ) \end{cases}$

$2\cos A \sin B - \sin C = 2\cos(B + 45^\circ) \sin B - \sin(2B + 45^\circ)$

$= 2(\cos B \cos 45^\circ - \sin B \sin 45^\circ) \sin B - (\sin 2B \cos 45^\circ + \cos 2B \sin 45^\circ)$

$= 2(\cos B \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin B \times \frac{\sqrt{2}}{2}) \sin B - (\sin 2B \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 2B \times \frac{\sqrt{2}}{2})$

$= \sqrt{2} \cos B \sin B - \sqrt{2} \sin^2 B - \frac{\sqrt{2}}{2} \underbrace{\sin 2B}_{2 \sin B \cos B} - \frac{\sqrt{2}}{2} \underbrace{\cos 2B}_{1 - 2 \sin^2 B}$

$= \sqrt{2} \cos B \sin B - \sqrt{2} \sin^2 B - \sqrt{2} \sin B \cos B - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \sin^2 B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$