کنکور ۱۴۰۴

ریاضی و آمار

جامع انسانی

خسرو محمدزاده

- آموزش ساده مفاهیم و نکات بر اساس نظام جدید آموزشی
- پوشش کامل مثال ها، فعالیت ها و تمرینات کتاب درسی
- تیپ‌بندی پرسش های چهارگزینه ای بر اساس کتاب های جدید
- انطباق کامل با سوالات کنکور سال های گذشته

بسم الله الرحمن الرحیم

کتاب جامع(آموزش و تست)

ریاضی و آمار

علوم انسانی

کنکور ۱۴۰۴

تألیف: خسرو محمدزاده

عنوان و نام پدیدآور: کتاب جامع ریاضی و آمار علوم انسانی / محمدزاده ، خسرو ۱۳۵۳.
مشخصات نشر: تهران: بیست، ۱۴۰۴
مشخصات ظاهری: ۲۰۰ص: مصور، جدول، نمودار؛ ۲۲×۲۹ سم.
شابک: ۱-۸-۹۶۴۶۰-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی: فیپای مختصر
بالای عنوان: کتاب جامع
فروست: کتابهای بیست
یادداشت: نمایه
یادداشت: کتابنامه

عنوان کتاب:	**کتاب جامع ریاضی و آمار علوم انسانی**
مؤلف:	**خسرو محمدزاده**
طراح جلد:	**الهام صالحی‌نژاد**
حروفچینی و صفحه‌آرایی:	**آتلیه بیست**
چاپ و پخش:	**کتابچی**
نوبت و سال چاپ:	**ششم/ تیر ماه ۱۴۰۴**
شابک:	**۹۷۸-۶۰۰-۹۶۴۶۰-۸-۱**
تیراژ:	**۱۰۰۰۰ نسخه**
صفحات مجازی مؤلف:	**اینستاگرام: mohamadzadeh_khosro** **تلگرام: @RiaziEnsani**

مقدمه مؤلف

خداوند را سپاس به سبب اعطای توفیق تألیف کتاب کاری که اینک در دسترس شماست و موجب ارائه خدمتی در جهتِ آموزش ریاضیات کنکور به دانش‌آموزان عزیز رشته انسانی شده است.

افراد به‌طور روزمره با مطالبی روبرو می‌شوند که جنبه به یادسپاری و حفظ کردنی دارند مانند نام اشخاص یا شماره تلفن آنها، اما بخش عمده‌ای از عملکرد روزانه شامل امور مهارتی می‌شوند همانند رانندگی و آشپزی که تسلط بر آنها نیاز به تمرین و ممارست دارد. این موضوع در یادگیری دروس نیز صادق است، برخی از دروس جنبه‌ی حفظ کردنی دارند مانند لغات زبان یا تعاریف اقتصاد. در مورد ریاضی اگرچه بعضی از روابط و فرمول‌های ریاضی به نظر حفظ‌کردنی هستند اما عمده‌ی مفاهیم ریاضی را نمی‌توان فقط با حفظ کردن یاد گرفت (مثل اینکه با حفظ کردنِ کتاب آیین‌نامه‌ی رانندگی بخواهیم رانندگی کردن را یاد بگیریم) ریاضی یک علم مهارتی است که نیاز به تمرین و ممارست دارد.

ممکن است پایه‌ی درسی شما در ریاضی ضعیف باشد، اما با اختصاص وقت کافی و انجام تمرینات هدفمند و طبیعتاً تلاش و پشتکار می‌توانید درس ریاضی را به خوبی فرا گرفته و مفاهیم آن را در حل تست‌های کنکور به کار گیرید.

مفاهیم و تمرینات این کتابِ کار به گونه‌ای تنظیم شده است که طی یک برنامه‌ی زمانبندی شده‌ی دقیق شما را برای شرکت در امتحان نهایی و کنکور و پاسخگویی به مسائل و تست‌های ریاضی کاملاً آماده می‌نماید.

از مهندس سیروس نصیری مدیریت محترم انتشارات بیست به سبب رهنمودهای عالمانه و مشفقانه کمال تشکر را دارم.

تیر ۱۴۰۴- خسرو محمدزاده

فهرست مطالب: **صفحه**

مجموعه اعداد (پیش‌نیاز)

مرجع کتاب درسی: ریاضی نهم

مجموعه‌های عددی:

به مجموعه‌ای که اعضای آن فقط اعداد می‌باشند، مجموعه‌ی عددی گفته می‌شود.

مجموعه‌های عددی مهم عبارتند از:

ـ **مجموعه اعداد طبیعی:** $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,۵,...\}$

ـ **مجموعه اعداد حسابی:** $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,...\}$

ـ **مجموعه اعداد صحیح:** $\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$

ـ **مجموعه اعداد طبیعی زوج:** $E=\{۲,۴,۶,۸,...\}$

ـ **مجموعه اعداد طبیعی فرد:** $O=\{۱,۳,۵,۷,...\}$

ـ **مجموعه اعداد اول:** $\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,...\}$

تذکر: عدد اول عددی است که بر هیچ عددی (به‌جز خودش و عدد یک) بخش‌پذیر نمی‌باشد.

ـ **مجموعه اعداد گویا:** $Q=\{\frac{a}{b}\,|\,a,b\in Z \;,\; b\neq ۰\}$

تذکر: هر عدد کسری و هر عددی که قابل تبدیل به کسر باشد، عدد گویا نامیده می‌شود.

مجموعه اعداد اصم (گنگ): $Q'=Q^C=\{x\,|\,x\notin Q\}$

هر عددی که گویا نباشد (قابل تبدیل به کسر نباشد)، عدد اصم نامیده می‌شود.

اعداد اصم دو دسته‌اند:

الف) عدد رادیکالی که جذر کامل نداشته باشد.　　ب) عدد اعشاری نامتناهی نامتناوب.

مجموعه اعداد حقیقی: $R=(-\infty,+\infty)=Q\cup Q'$

تذکر: مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌ترین و کامل‌ترین مجموعه عددی می‌باشد که شامل همه اعداد گویا و اصم می‌باشد.

تذکر: اگر مخرج یک کسر صفر باشد، آن عدد تعریف نشده است و عضو هیچ مجموعه عددی نمی‌باشد.

مجموعه متناهی و نامتناهی

اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود، مشخص و قابل شمارش باشد، آن مجموعه را متناهی، با پایان یا با انتها می‌نامند.

اگر تعداد اعضای یک مجموعه نامحدود، نامشخص و غیرقابل شمارش باشد، آن مجموعه را نامتناهی، بی‌پایان یا بی‌انتها می‌نامند.

نمایش ریاضی مجموعه‌ها

مجموعه‌های عددی را با علائم ریاضی نیز می‌توان نمایش داد که به این طریق مجموعه‌های عددی متنوعی تعریف می‌شود.

مثال:

$B=\{x\,|\,۳\le x<۷ \;,\; x\in W\}=\{۳,۴,۵,۶\}$

$A=\{x\,|\,x<۵ \;,\; x\in N\}=\{۱,۲,۳,۴\}$

$D=\{x\,|\,x\le ۷ \;,\; x\in E\}=\{۲,۴,۶\}$

$C=\{x\,|\,-۱\le x\le ۱ \;,\; x\in Z\}=\{-۱,۰,۱\}$

$F=\{\frac{x^۲}{۱+x^۲}\,|\,x\in z \;,\; -۱\le x<۳\}=\{\frac{۱}{۲},۰,\frac{۴}{۵}\}$

$G=\{\frac{۱}{n}\,|\,n\le ۵ \;,\; n\in O\}=\{۱,\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۵}\}$

$E=\{۲k\,|\,k\in N\}=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,...\}$

$H=\{۲^k\,|\,-۱\le k\le ۱ \;,\; k\in Z\}=\{۲^{-۱},۲^۰,۲^۱\}=\left\{\frac{۱}{۲},۱,۲\right\}$

$O=\{۲k-۱\,|\,k\in N\}=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,...\}$

عملیات ریاضی:

در مثال‌های زیر به نحوه‌ی انجام عملیات بین اعداد و علامتِ عدد حاصل دقت نمایید:

$-5+2=-3 \qquad 5-2=3 \qquad -5-2=-7 \qquad 5+2=7$

$-5\times 2=-10 \qquad 5\times -2=-10 \qquad -5\times -2=10 \qquad 5\times 2=10$

$\frac{-3}{3}=\frac{3}{-3}=-\frac{3}{3}=-1 \qquad \frac{3}{3}=1 \qquad 3\times 3=9 \qquad 3-3=0 \qquad 3+3=6$

$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\xrightarrow{\text{کسرها را هم مخرج می نماییم}}\frac{2\times 4}{5\times 4}+\frac{3\times 5}{4\times 5}=\frac{8+15}{20}=\frac{23}{20} \qquad \frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$

$\frac{2}{5}+3=\frac{2}{5}+\frac{3\times 5}{1\times 5}=\frac{2+15}{5}=\frac{17}{5} \qquad \frac{3}{7}+1=\frac{3}{7}+\frac{7}{7}=\frac{10}{7}$

$\frac{2}{5}\times\frac{7}{3}=\frac{2\times 7}{5\times 3}=\frac{14}{15} \qquad 3\frac{2}{5}=\frac{3(5)+2}{5}=\frac{17}{5}$

$\frac{\cancel{12}^{\,3}}{7}\times\frac{5}{\cancel{8}_{\,2}}=\frac{3\times 5}{7\times 2}=\frac{15}{14} \qquad \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{9}_{\,3}}\times\frac{-4}{7}=\frac{2\times -4}{3\times 7}=\frac{-8}{21}$

$\frac{13}{8}\div(-\frac{7}{20})=\frac{13}{\cancel{8}_{\,2}}\times-\frac{\cancel{20}^{\,5}}{7}=\frac{13\times -5}{2\times 7}=\frac{-65}{14} \qquad \frac{3}{7}\div\frac{5}{4}=\frac{3}{7}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{35}$

$5+0=5 \qquad 0+5=5 \qquad 5-0=5 \qquad 0-5=-5$

$5\times 0=0 \qquad 0\times 5=0 \qquad \frac{0}{5}=0 \qquad \frac{5}{0}$:تعریف نشده

بنا به قرارداد، در عبارت‌هایی که عملیات جمع و ضرب انجام می‌شود، اگر ترتیب عملیات با پرانتز مشخص نشده باشد، ابتدا عملیات ضرب و تقسیم به ترتیب از چپ به راست انجام می‌شود، سپس عملیات جمع یا تفریق به ترتیب از چپ به راست انجام خواهد شد.

مثال: $4\times 3-23+41\times 2=(4\times 3)-23+(41\times 2)=12-23+82=71$

$12-4\times 5\div 2+7=12-\left[(4\times 5)\div 2\right]+7=12-10+7=9$

محاسبات اعشاری:

جهت آشنایی با ضرب اعداد اعشاری در ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و . . . یا تقسیم بر آن به مثال‌های زیر توجه کنید:

$23/45\div 10=2/345 \qquad 23/45\times 10=234/5$

$23/45\div 100=0/2345 \qquad 23/45\times 100=2345$

$23/45\div 1000=0/02345 \qquad 23/45\times 1000=23450$

توجه داشته باشید که هر عدد طبیعی را می‌توان به عنوان عددی اعشاری با ارقام اعشارِ صفر در نظر گرفت مثلاً:

$35=35/000...$

$0/0145\times 10=0/145 \qquad 253\div 10=25/3$

$0/0145\times 100=1/45 \qquad 253\div 100=2/53$

$0/0145\times 1000=14/5 \qquad 253\div 1000=0/253$

$0/0145\times 10000=145 \qquad 253\div 10000=0/0253$

برای جمع و تفریق دو عدد اعشـاری آن دو را به گونه‌ای زیر هم می‌نویســیم که ممیزهای این اعداد زیر هم قرار بگیرند؛ سـپس طبق قواعدِ جمع اعدادِ طبیعی، با حفظ ممیز در جای خود عمل جمع یا تفریق را انجام می‌دهیم. مثلاً برای جمع دو عدد اعشاری ۲۳/۶۷۲ و ۵/۰۸ داریم:

$$\begin{array}{r} 23/672 \\ +\ 5/080 \\ \hline 28/752 \end{array}$$

در ضربِ دو عدد اعشاری کافی است نخست ممیز این اعداد را نادیده بگیریم و آن‌ها را مانند دو عدد طبیعی در هم ضرب کنیم. سپس به اندازه‌ی مجموع تعداد ارقام بعد از ممیز آن‌ها، رقم‌های سمت راست عدد بدست آمده را بعد از ممیز قرار دهیم.

مثال: برای ضرب دو عدد اعشاری ۱۳/۴ و ۲/۰۷ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$134\times 207=27738$

$13/4\times 2/07=27/738$

توان و رادیکال (پیش نیاز)

مرجع کتاب درسی: ریاضی نهم

توان و نما

اگر بخواهیم عددی را چند بار در خود ضرب کنیم، برای خلاصه‌نویسی این عمل، از نماد توان استفاده می‌کنیم. مثلاً:

$$3\times3\times3\times3\times3=3^5$$

جهت افزایش سرعت در انجام محاسبات، مقادیر توانی زیر را به‌خاطر بسپارید:

$2^1=2$ $\quad 2^2=4$ $\quad 2^3=8$ $\quad 2^4=16$ $\quad 2^5=32$

$2^6=64$ $\quad 2^7=128$ $\quad 2^8=256$ $\quad 2^9=512$ $\quad 2^{10}=1024$

$3^1=3$ $\quad 3^2=9$ $\quad 3^3=27$ $\quad 3^4=81$ $\quad 3^5=243$

$4^1=4$ $\quad 4^2=16$ $\quad 4^3=64$ $\quad 4^4=256$

$5^1=5$ $\quad 5^2=25$ $\quad 5^3=125$ $\quad 5^4=625$

$6^1=6$ $\quad 6^2=36$ $\quad 6^3=216$

$7^2=49$ $\quad 8^2=64$ $\quad 9^2=81$ $\quad 10^2=100$ $\quad 11^2=121$

$12^2=144$ $\quad 13^2=169$ $\quad 14^2=196$ $\quad 15^2=225$ $\quad 25^2=625$

$10^1=10$ $\quad 10^2=100$ $\quad 10^3=1000$ $\quad 10^4=10000$ $\quad 10^5=100000$

$10^{-1}=0/1$ $\quad 10^{-2}=0/01$ $\quad 10^{-3}=0/001$ $\quad 10^{-4}=0/0001$ $\quad 10^{-5}=0/00001$

نکته ۱ ـ هر عدد به توان یک می‌شود، خود عدد. $\quad x^1=x$

نکته ۲ ـ یک دارای هر توانی باشد می‌شود، یک. $\quad 1^x=1$

نکته ۳ ـ هر عدد مخالف صفر به توان صفر می‌شود، یک. $\quad x^0=1 \quad (x\neq 0)$

نکته ۴ ـ صفر اگر دارای توان مثبت باشد می‌شود، صفر.

نکته ۵ ـ عدد منفی اگر دارای توان زوج باشد، حاصل آن مقداری مثبت می‌شود. $\quad (-5)^2=25$

نکته ۶ ـ عدد بزرگ‌تر از یک هر چقدر دارای توان بزرگ‌تری باشد، حاصل آن بزرگ‌تر می‌شود.

$a>1 \ ,\ (n>m) \quad \Rightarrow a^n>a^m$ $\quad$ مثال: $5^7>5^4$

نکته ۷ ـ عدد بین صفر و یک هرچقدر دارای توان بزرگ‌تر باشد، حاصل آن کوچک‌تر می‌شود.

$0<a<1 \ ,\ (n>m) \quad \Rightarrow a^n<a^m$ $\quad$ مثال: $(0/5)^7<(0/5)^4$

رادیکال و جذرگیری

عملیات جذرگیری به نوعی بازگشتِ عملیات توانی می‌باشد. به مثال‌های زیر دقت کنید:

$5^2=25 \longrightarrow \sqrt[2]{25}=5$ $\qquad 4^3=64 \longrightarrow \sqrt[3]{64}=4$

$3^4=81 \longrightarrow \sqrt[4]{81}=3$ $\qquad 2^5=32 \longrightarrow \sqrt[5]{32}=2$

یک عبارت رادیکالی در حالت کلی مطابق الگوی زیر می‌باشد:

$\sqrt[n]{A}$ $\qquad$ فرجه $:n\in \mathbb{N}-\{1\}$ $\qquad$ عبارت زیر رادیکال $:A\in\mathbb{R}$

تذکر: فرجه ۲ معمولاً نوشته نمی‌شود.

لازم است حاصل رادیکال‌های زیر را به‌خاطر بسپارید:

$\sqrt{0}=0$ $\quad \sqrt{1}=1$

$\sqrt{100}=10$ $\quad \sqrt{121}=11$ $\quad \sqrt{144}=12$ $\quad \sqrt{169}=13$ $\quad \sqrt{196}=14$ $\quad \sqrt{225}=15$

$\sqrt{2}\simeq 1/4$ $\quad \sqrt{3}\simeq 1/7$ $\quad \sqrt{5}\simeq 2/2$ $\quad \sqrt{6}\simeq 2/4$ $\quad \sqrt{7}\simeq 2/6$ $\quad \sqrt{8}\simeq 2/8$

نکته ۱) درصورت امکان توان عبارت زیر رادیکال با فرجه رادیکال ساده می‌شود. $\quad \sqrt[12]{5^6}=\sqrt[2]{5^1}$ $\quad \sqrt[15]{8^{10}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$

نکته ۲) اگر فرجه رادیکال در یک عدد ضرب شود، توان عبارت زیر رادیکال نیز در همان عدد ضرب می‌شود. $\quad \sqrt[n]{x^m}=\sqrt[n.k]{x^{m.k}}$

نکته ۳) رادیکالی که دارای فرجه زوج بوده و عبارت زیر رادیکال منفی باشد، در مجموعه اعداد حقیقی تعریف نشده است.

مثال:

$\sqrt[۴]{۸۱}=۳$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۸}=۲$ $\qquad$ $\sqrt[۲]{۲۵}=۵$

تعریف نشده: $\sqrt[۴]{-۸۱}$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{-۸}=-۲$ $\qquad$ تعریف نشده: $\sqrt[۲]{-۲۵}$

نکته ۴) حاصل عبارت رادیکالی با فرجه زوج همواره مقداری مثبت است.

$\sqrt[n]{A}=B$ $\qquad$ اگر n زوج باشد $\Rightarrow \begin{cases} A\geq ۰ \text{ مثبت} \\ B\geq ۰ \text{ مثبت} \end{cases}$

نکته ۵) اگر توان عبارت زیر رادیکال با فرجه رادیکال مساوی باشد، عبارت زیر رادیکال طبق الگوی زیر از رادیکال خارج می‌شود.

$\sqrt[n:\text{فرد}]{a^n}=a$ $\qquad$ $\sqrt[n:\text{زوج}]{a^n}=|a|$

مثال:

$\sqrt[۷]{x^۷}=x$ $\qquad$ $\sqrt[۵]{(-۳)^۵}=-۳$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۲^۳}=۲$

$\sqrt[۶]{x^۶}=|x|$ $\qquad$ $\sqrt[۴]{(-۲)^۴}=|-۲|=۲$ $\qquad$ $\sqrt[۲]{۳^۲}=|۳|=۳$

➢ **تذکر:** اگر تشـــخیص داده شـــود مقدار عبارت داخل قدر مطلق منفی اســـت، برای خروج از قدر مطلق باید عبارت را در علامت منفی ضـــرب نماییم.

$|۱-\sqrt{۳}| \xrightarrow[\text{مقدار آن منفی است}]{۱-\sqrt{۳}\approx -۰/۷} -(۱-\sqrt{۳})$ $\qquad$ $|\sqrt{۳}-۱| \xrightarrow[\text{مقدار آن مثبت است}]{\sqrt{۳}-۱\approx ۰/۷} \sqrt{۳}-۱$

نکته ۶) بعضی دوجمله‌ای‌های رادیکالی عددی قابل تبدیل به اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌باشند.

$$(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲=\sqrt{۳}^۲+\sqrt{۲}^۲+۲\sqrt{۳}\sqrt{۲}=۳+۲+۲\sqrt{۶}=۵+۲\sqrt{۶}$$

ساده کردن رادیکال

اگر عدد زیر رادیکال جذر کامل نداشته باشد و یا عدد نسبتاً بزرگی باشد با یکی از روش‌های زیر می‌توان رادیکال را تا حد امکان ساده نمود.

روش اول: ۱ ـ عدد زیر رادیکال را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم.

۲ ـ اگر توان از فرجه کمتر باشد، عبارت زیر رادیکال باقی می‌ماند.

۳ ـ اگر توان با فرجه مساوی باشد، پایه را از رادیکال خارج می‌کنیم.

۴ ـ اگر توان از فرجه بزرگ‌تر باشد، پایه را از رادیکال خارج نموده و از توان عبارت زیر رادیکال به اندازه فرجه کم می‌نماییم.

مثال: $\sqrt{۲۲۵۰}=\sqrt{۲\times ۳^۲\times ۵^۳}=\sqrt{۲}\times\sqrt{۳^۲}\times\sqrt{۵^۳}=\sqrt{۲}\times ۳\times ۵\sqrt{۵}=۱۵\sqrt{۱۰}$

روش دوم: ۱ ـ عدد زیر رادیکال را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عدد می‌نویسیم که حداقل یکی از آنها جذر داشته باشد.

۲ ـ جذر عددی که مجذور کامل می‌باشد را گرفته و پشت رادیکال می‌نویسیم.

مثال: $\sqrt{۲۲۵۰}=\sqrt{۲۲۵\times ۱۰}=۱۵\sqrt{۱۰}$

$\sqrt{۳۲}=\sqrt{۱۶\times ۲}=۴\sqrt{۲}$ $\qquad$ $\sqrt{۵۰}=\sqrt{۲۵\times ۲}=۵\sqrt{۲}$ $\qquad$ $\sqrt{۱۲}=\sqrt{۴\times ۳}=۲\sqrt{۳}$

$\sqrt{۷۲}=\sqrt{۳۶\times ۲}=۶\sqrt{۲}$ $\qquad$ $\sqrt{۸۰}=\sqrt{۱۶\times ۵}=۴\sqrt{۵}$ $\qquad$ $\sqrt{۱۸}=\sqrt{۹\times ۲}=۳\sqrt{۲}$

$\sqrt{۹۸}=\sqrt{۴۹\times ۲}=۷\sqrt{۲}$ $\qquad$ $\sqrt{۲۰}=\sqrt{۴\times ۵}=۲\sqrt{۵}$

جمع و تفریق رادیکال‌ها

رادیکال‌ها فقط درصورتی با یکدیگر جمع و منها می‌شوند که هر دو شرط زیر برقرار باشد.

۱ ـ فرجه رادیکال‌ها با یکدیگر مساوی باشند. $\qquad$ ۲ ـ عبارت زیر رادیکال‌ها با یکدیگر یکسان باشند.

مثال:

جمع نمـی شـود $=۷\sqrt{۳}+۵\sqrt{۲}$ $\qquad$ $۷\sqrt{۳}+۵\sqrt{۳}=۱۲\sqrt{۳}$

منها نمـی شـود $=۱۰\sqrt[۳]{۵}-۴\sqrt[۲]{۵}$ $\qquad$ $۸\sqrt[۳]{x}-۲\sqrt[۳]{x}=۶\sqrt[۳]{x}$

نکته: برای جمع و منها نمودن رادیکال‌های نامشابه ابتدا هریک از رادیکال‌ها را تا حد امکان ساده می‌کنیم، سپس درباره جمع و تفریق آنها تصمیم می‌گیریم.

$\sqrt{۸}-۵\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}=-۳\sqrt{۲}$ $\qquad$ $\sqrt{۵۰}+\sqrt{۱۸}=۵\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}=۸\sqrt{۲}$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

رادیکال‌ها فقط به شرطی با یکدیگر ضرب یا تقسیم می‌شوند که فرجه رادیکال‌ها با یکدیگر مساوی باشند.

در این‌صورت طبق الگوی زیر ضرایب با یکدیگر و عبارت زیر رادیکال‌ها با یکدیگر ضرب یا تقسیم می‌شوند:

$$A\sqrt[n]{x}\times B\sqrt[n]{y}=AB\sqrt[n]{xy}\qquad \frac{A\sqrt[n]{x}}{B\sqrt[n]{y}}=\frac{A}{B}\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

مثال:

$$\sqrt{۳}(۵\sqrt{۲})=۵\sqrt{۶}\qquad ۲\sqrt{۳}\times ۴\sqrt{۵}=۸\sqrt{۱۵}$$

$$\sqrt{۳}(۵+\sqrt{۲})=۵\sqrt{۳}+\sqrt{۶}\qquad \frac{۱۵\sqrt{۱۲}}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۱۵}{۳}\sqrt{\frac{۱۲}{۳}}=۵\sqrt{۴}=۵\times ۲=۱۰$$

➢ **تذکر مهم:** حاصل تساوی‌های زیر را با یکدیگر مقایسه کنید.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=۱\qquad \sqrt{a}\times\sqrt{a}=a\qquad \sqrt{a}-\sqrt{a}=۰\qquad \sqrt{a}+\sqrt{a}=۲\sqrt{a}$$

گویا کردن رادیکال‌ها

اگر در مخرج یک عبارت کسری عبارت رادیکالی وجود دا شته با شد، با ا ستفاده از یکی از روش‌های زیر رادیکال را از مخرج کسر حذف نموده و به این ترتیب عبارت کسری را گویا می‌کنیم.

الف) اگر مخرج کسر به‌طور کامل زیر رادیکال با فرجهٔ ۲ باشد، صورت و مخرج کسر را در عبارت مخرج کسر ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۶}{\sqrt{۲}}=\frac{۶\times\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}=\frac{۶\sqrt{۲}}{۲}=۳\sqrt{۲}$$

ب) اگر مخرج کسر به صورت $\sqrt[n]{a^m}$ باشد، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۶}{\sqrt[۵]{۸}}=\frac{۶}{\sqrt[۵]{۲^۳}}=\frac{۶}{\sqrt[۵]{۲^۳}}\times\frac{\sqrt[۵]{۲^۲}}{\sqrt[۵]{۲^۲}}=\frac{۶\sqrt[۵]{۲^۲}}{\sqrt[۵]{۲^۵}}=\frac{۶\sqrt[۵]{۴}}{۲}=۳\sqrt[۵]{۴}$$

ج) اگر مخرج کسر دو جمله‌ای باشد و حداقل یکی از آنها زیر رادیکال باشد، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}=\frac{۱(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})}{\underbrace{(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})}_{\text{مزدوج}}}=\frac{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}^۲-\sqrt{۳}^۲}=\frac{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\frac{۷}{۳+\sqrt{۲}}=\frac{۷(۳-\sqrt{۲})}{(۳+\sqrt{۲})(۳-\sqrt{۲})}=\frac{۷(۳-\sqrt{۲})}{۳^۲-\sqrt{۲}^۲}=\frac{۷(۳-\sqrt{۲})}{۷}=۳-\sqrt{۲}$$

اتحادها و تجزیه (پیش نیاز)

مرجع کتاب درسی: ریاضی نهم

اتحادها

الگوهایی هستند جهت افزایش سرعت در محاسبات عبارات جبری. اتحادهای مهم عبارتند از:

اتحاد مربع مجموع یا تفاضل دو جمله

$$(\text{اولی}+\text{دومی})^۲=(\text{اولی})^۲+۲(\text{اولی}\times\text{دومی})+(\text{دومی})^۲$$

$$(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲\qquad a^۲+۲a+۱=(a+۱)^۲$$

$$(x+۳)^۲=x^۲+۶x+۹\qquad x^۲+۴x+۴=(x+۲)^۲$$

$$(a+۵)^۲=a^۲+۱۰a+۲۵\qquad x^۴+۲x^۲+۱=(x^۲+۱)^۲$$

$$(۲x+۱)^۲=۴x^۲+۴x+۱\qquad ۲۵x^۲+۳۰xy+۹y^۲=(۵x+۳y)^۲$$

$$(\sqrt{۳}+۱)^۲=\sqrt{۳}^۲+۲\sqrt{۳}+۱^۲=۳+۲\sqrt{۳}+۱=۴+۲\sqrt{۳}$$

$$(\text{اولی}-\text{دومی})^۲=(\text{اولی})^۲-۲(\text{اولی}\times\text{دومی})+(\text{دومی})^۲$$

$$(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲\qquad a^۲-۲a+۱=(a-۱)^۲$$

$$(x-۳)^۲=x^۲-۶x+۹\qquad ۴x^۲-۴x+۱=(۲x-۱)^۲$$

$$(a-۲)^۲=a^۲-۴a+۴\qquad ۲۵x^۲-۴۰x+۱۶=(۵x-۴)^۲$$

$$(\sqrt{۳}-E)^۲=۳-۲\sqrt{۳}E+E^۲\qquad x^۶-۲x^۳+۱=(x^۳-۱)^۲$$

اتحاد مزدوج

$$(\text{اولی}+\text{دومی})(\text{اولی}-\text{دومی})=(\text{اولی})^{۲}-(\text{دومی})^{۲}$$

$(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$

$(a-۳)(a+۳)=a^{۲}-۹$

$(x+۲)(x-۲)=x^{۲}-۴$

$(۳x-۲y)(۳x+۲y)=(۳x)^{۲}-(۲y)^{۲}=۹x^{۲}-۴y^{۲}$

$(a^{۳}-b^{۵})(a^{۳}+b^{۵})=(a^{۳})^{۲}-(b^{۵})^{۲}=a^{۶}-b^{۱۰}$

$(a^{۷}+۶)(a^{۷}-۶)=(a^{۷})^{۲}-۶^{۲}=a^{۱۴}-۳۶$

$(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)=\sqrt{۵}^{۲}-۲^{۲}=۵-۴=۱$

$a^{۲}-b^{۲}=(a-b)(a+b)$

$a^{۲}-۲۵=(a-۵)(a+۵)$

$۴۹a^{۲}-۸۱b^{۲}=(۷a-۹b)(۷a+۹b)$

$x^{۱۲}-۱۶=(x^{۶}-۴)(x^{۶}+۴)$

$(x+۱)^{۲}-y^{۲}=(x+۱-y)(x+۱+y)$

اتحادهای مجموع یا تفاضل مکعب دو جمله (اتحاد چاق و لاغر)

$a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})$

$x^{۳}+۸=(x+۲)(x^{۲}-۲x+۴)$

$(x+۵)(x^{۲}-۵x+۲۵)=x^{۳}+۵^{۳}=x^{۳}+۱۲۵$

$a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})$

$a^{۳}-۲۷=(a-۳)(a^{۲}+۳a+۹)$

$(۲x-۱)(۴x^{۲}+۲x+۱)=(۲x)^{۳}-۱^{۳}=۸x^{۳}-۱$

اتحادهای مکعب مجموع یا تفاضل دو جمله

$(a+b)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$

$(a+۲)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}۲+۳a۲^{۲}+۲^{۳}=a^{۳}+۶a^{۲}+۱۲a+۸$

$x^{۳}+۱۲x^{۲}+۴۸x+۶۴=(x+۴)^{۳}$

$(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}b+۳ab^{۲}-b^{۳}$

$(a-۵)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}۵+۳a۵^{۲}-۵^{۳}=a^{۳}-۱۵a^{۲}+۷۵a-۱۲۵$

$x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۱=(x-۱)^{۳}$

اتحاد جمله مشترک

$$(x+a)(x+b)=\underbrace{x^{۲}}_{\text{مشترک به توان۲}}+\underbrace{(a+b)}_{\text{مجموع دو عدد}}x+\underbrace{(ab)}_{\text{ضرب دو عدد}}$$

$(x+۳)(x+۴)=x^{۲}+۷x+۱۲$

$(x-۵)(x+۳)=x^{۲}-۲x-۱۵$

$(x+۵)(x-۲)=x^{۲}+۳x-۱۰$

$(x-۱)(x-۴)=x^{۲}-۵x+۴$

$x^{۲}+۷x+۱۰=(x+۲)(x+۵)$

$x^{۲}-۷x+۱۰=(x-۲)(x-۵)$

$x^{۲}+۳x-۱۰=(x-۲)(x+۵)$

$x^{۲}-۳x-۱۰=(x+۲)(x-۵)$

فاکتورگیری

$۲x+۲y=۲(x+y)$

$ab-bc=b(a-c)$

$۱۸x^{۵}-۱۲x^{۳}=۶x^{۳}(۳x^{۲}-۲)=۲\times۳x^{۳}(۳x^{۲}-۲)$

$ax-ay+bx-by=a(x-y)+b(x-y)=(x-y)(a+b)$

$۳x^{۲}+۵x=x(۳x+۵)$

$x^{۳}+x^{۲}+x=x(x^{۲}+x+۱)$

$m(m+۲)-۵(m+۲)=(m+۲)(m-۵)$

$(x+۵)^{۲}-\sqrt{۳}(x+۵)=(x+۵)(x+۵-\sqrt{۳})$

تذکر: اگر از علامت منفی فاکتور گرفته شود، علامت همه جملات قرینه می‌شود.

$-۲x-۲y=-۲(x+y)$

$-۲x+۲y=-۲(x-y)$

$a-b=-(b-a)$

معادله درجه اول

مرجع کتاب درسی: ریاضی و آمار (۱) ـ فصل اول ـ درس ۱

معادله درجه اول

هر معادله به‌صورت $ax+b=0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می‌نامند.

حل معادله (تعیین ریشه)

برای هر معادله درجه اول (به جز در موارد خاص) یک عدد وجود دارد که اگر به جای مجهول (x) قرار گیرد طرفین معادله با یکدیگر مساوی خواهند شد. به چنین عددی جواب یا ریشه معادله گفته می‌شود. برای حل معادله درجه اول به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱ – چنانچه معادله موردنظر دارای فرم کسری باشد، با استفاده از عملیاتی مانند مخرج مشترک، طرفین وسطین و . . . معادله را به فرم خطی تبدیل می‌کنیم. (بهترین روش در این مورد آن است که طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب کنیم.)

۲ – جملات دارای مجهول را به یک سمت مساوی و جملات معلوم را به سمت دیگر تساوی منتقل می‌کنیم. هنگام انتقال علامت جمله موردنظر قرینه می‌شود.

➢ **تذکر**: در حالت کلی زمانی که یک عدد یا عبارت از یک سمت تساوی به سمت دیگر انتقال می‌یابد، نقش آن تغییر می‌کند. به مثال‌های ساده زیر دقت کنید.

(تبدیل علامت منها به جمع) $x-3=5 \longrightarrow x=5+3$

(تبدیل علامت جمع به منها) $x+3=5 \longrightarrow x=5-3$

(تبدیل عمل تقسیم به ضرب) $\frac{x}{3}=5 \longrightarrow x=5\times 3$

(تبدیل عمل ضرب به تقسیم) $3x=5 \longrightarrow x=\frac{5}{3}$

۳ ـ طرفین تساوی را تا حد امکان ساده نموده، معادله را به فرم نهایی $ax=b$ تبدیل می‌کنیم.

مجهول: x ضریب مجهول: a طرف معلوم: b

۴ ـ مقدار مجهول را از قاعدهٔ «طرف معلوم تقسیم بر ضریب مجهول» $x=\frac{b}{a}$ محاسبه می‌کنیم.

مثال:

$$4x-7+x=11+2x \Rightarrow 4x+x-2x=11+7 \Rightarrow 3x=18 \xrightarrow{\div 3} x=6$$

$$3x+\frac{5}{2}=x+4 \xrightarrow{\times 2} 2(3x)+2(\frac{5}{2})=2(x)+2(4) \Rightarrow 6x+5=2x+8 \Rightarrow 4x=3 \xrightarrow{\div 4} x=\frac{3}{4}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3} \xrightarrow{\times 12} 12(\frac{x}{2})-12(\frac{1}{4})=12(\frac{x}{3}) \Rightarrow 6x-3=4x \Rightarrow 2x=3 \xrightarrow{\div 2} x=\frac{3}{2}$$

بحث در نوع و تعداد جواب‌های معادلهٔ درجهٔ اول

برای معادله درجه اول به فرم $ax=b$ سه حالت امکان‌پذیر است.

۱- اگر $a\neq 0$ باشد، معادله استاندارد بوده و دارای یک ریشه حقیقی می‌باشد.

۲- اگر $a=0$ و $b=0$ باشد، معادله مبهم بوده و بیشمار جواب دارد.

۳- اگر $a=0$ و $b\neq 0$ باشد، معادله غیرممکن (ممتنع یا نشدنی) بوده و جواب ندارد.

دستگاه معادلات خطی دو مجهولی

برای حل دستگاه به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱- با انتقال مقادیر مجهول به یک طرف تساوی و مقادیر معلوم به طرف دیگر، معادلات را مرتب می‌کنیم.

۲- با ضرب یک یا هر دو معادله در اعداد مناسب برای یکی از متغیرها ضرایب قرینه ایجاد می‌کنیم.

۳- طرفین معادلات را با یکدیگر جمع نموده به این ترتیب متغیر با ضریب قرینه حذف می‌شود.

۴- با حل معادله‌ی یک مجهولی ایجاد شده مقدار متغیر موجود را بدست می‌آوریم.

۵- مقدار بدست آمده را در یکی از معادلات اولیه جایگزین نموده مقدار متغیر دیگر را نیز تعیین می‌کنیم.

مثال ۱:

$$\begin{cases} x-y=3 \xrightarrow{\times 3} 3x-3y=9 \\ 4x+3y=5 \Rightarrow 4x+3y=5 \end{cases} \Rightarrow 7x=14 \Rightarrow x=2 \quad , \qquad x-y=3 \Rightarrow 2-y=3 \Rightarrow y=-1$$

مثال ۲:

$$\begin{cases} 2x-7y=3 \xrightarrow{\times -3} -6x+21y=-9 \\ 3x+5y=20 \xrightarrow{\times 2} 6x+10y=40 \end{cases} \Rightarrow 31y=31 \Rightarrow y=1 \quad , \qquad 3x+5(1)=20 \Rightarrow x=5$$

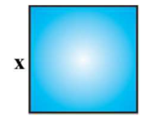
حل مسأله به کمک معادله

آنچه حل تست‌های این مبحث را مشکل می‌سازد ناتوانی در تبدیل صورت مسئله به معادله ریاضی می‌باشد و آن هم به علت ناتوانی در تبدیل کلمات فارسی به نمادهای ریاضی می‌باشد. سعی می‌کنیم با تبدیل‌های ساده زیر و درنهایت حل چند تست، این مشکل را برطرف نماییم.

- سه برابر عددی برابر ۷ است: .... $3x = 7$
- به دو برابر عددی، ۴ واحد اضافه می‌کنیم: .... $2x + 4$
- مجموع عددی با ۵: .... $x + 5$
- نصف عددی: .... $\frac{x}{2}$
- ثلث عددی: .... $\frac{x}{3}$
- ربع عددی: .... $\frac{x}{4}$
- مجذور عددی: .... x^2
- جذر عددی: .... $\sqrt{x}$
- مکعب عددی: .... x^3
- مجموع عددی با نصف آن عدد: .... $x + \frac{x}{2}$
- مجموع سه برابر عددی با ثلث آن عدد، برابر ۵ است: .... $3x + \frac{x}{3} = 5$
- به ربع عددی ۷ واحد اضافه نموده، حاصل ۱۰ می‌شود: .... $\frac{x}{4} + 7 = 10$
- تفاضل عددی از ۵: .... $5 - x$
- تفاضل ۵ از عددی: .... $x - 5$
- تفاضل نصف عددی از دو برابر آن عدد: .... $2x - \frac{x}{2}$
- از عددی ۳ واحد کم می‌نماییم: .... $x - 3$
- از دو برابر عددی، همان عدد را کسر می‌نماییم: .... $2x - x$
- نصف عددی را از سه برابر آن عدد کم نموده، باقیمانده ۷ می‌شود: .... $3x - \frac{x}{2} = 7$
- نسبت عددی به ۵: .... $\frac{x}{5}$
- نسبت عددی به ۲، برابر است با ثلث عدد ۷: .... $\frac{x}{2} = \frac{7}{3}$
- A از B، ۵ واحد بزرگ‌تر است: .... $A = B + 5$
- A از B، ۷ واحد کوچک‌تر است: .... $A = B - 7$
- سه برابر عددی از نصف آن عدد ۱۰ واحد بزرگ‌تر است: .... $3x = \frac{x}{2} + 10$
- عددی از مجذور آن عدد ۱۲ واحد کوچک‌تر است: .... $x = x^2 - 12$
- مجموع نصف عددی با ۷: .... $\frac{x}{2} + 7$
- نصف مجموع عددی با ۷: .... $\frac{x + 7}{2}$
- معکوس عددی: .... $\frac{1}{x}$
- قرینه عددی: .... $-x$
- مجموع دو عدد طبیعی (یا حسابی یا صحیح) متوالی: .... $x + (x + 1)$
- مجموع دو عدد زوج متوالی: .... $x + (x + 2)$
- مجموع دو عدد فرد متوالی: .... $x + (x + 2)$

محیط و مساحت شکل‌های هندسی

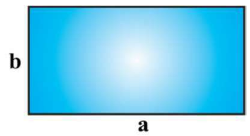
مربع



محیط = ۴(ضلع) = $4x$

مساحت = ضلع به توان دو = x^2

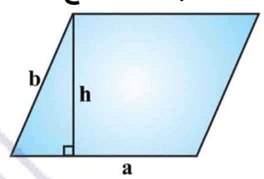
مستطیل



محیط = ۲(طول + عرض) = $2(a+b) = 2a + 2b$

مساحت = طول × عرض = ab

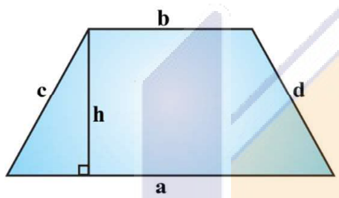
متوازی الاضلاع



محیط = ۲(طول + عرض) = $2(a+b) = 2a + 2b$

مساحت = ارتفاع × قاعده = $h \times a$

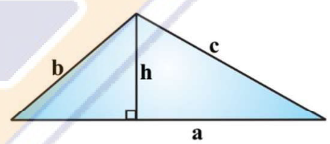
ذوزنقه



محیط = مجموع ۴ ضلع = $a + b + c + d$

مساحت = (مجموع دو قاعده) × ارتفاع / ۲ = $\frac{(a+b)h}{2}$

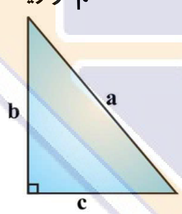
مثلث



محیط = مجموع سه ضلع = $a + b + c$

مساحت = ارتفاع × قاعده / ۲ = $\frac{h \times a}{2}$

مثلث قائم‌الزاویه

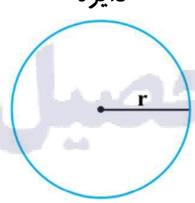


محیط = $a + b + c$

مساحت = $\frac{b \times c}{2}$

رابطه فیثاغورث: $a^2 = b^2 + c^2$

دایره



محیط = $2\pi r$

مساحت = πr^2

(شعاع: r ، $\pi \simeq 3/14$)

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

حل معادله با ضرایب کسری

۱- جواب معادله $۱۵ = \frac{۵x+۹}{۴} + ۳x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲- قرینهٔ معکوس ریشهٔ معادلهٔ $-x = ۲ + \frac{۳x-۴}{۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

۳- جواب معادله $\frac{x+۱}{۴} = \frac{x+۵}{۳} - \frac{x+۳}{۲}$ چند است؟

۱) -۵ ۲) ۳۵ ۳) $-\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

حل مسئله به کمک معادله

۴- به مجموع دوبرابر عددی با نصف آن عدد ۱۰ واحد اضافه نموده‌ایم، حاصل پنج برابر آن عدد شده است. مجذور آن عدد کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۵- تفاضل عددی از ۲۵ برابر با ثلث مجموع همان عدد با ۲۷ است. مجموع قرینه و ربع آن عدد کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۵ ۳) -۸ ۴) -۹

۶- دو برابر عددی از $\frac{۳}{۴}$ آن عدد ۳۰ واحد بزرگتر است. مجموع ارقام آن عدد چند است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۷- مجموع ۵ برابر عددی با ۴ برابر عددی دیگر، ۷ است. اگر مجموع دو عدد برابر با ۱ باشد. مجموع مربعات آن دوعدد کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۳ ۴) ۱۰

۸- ترکیب‌های شیمیایی مختلفی از مخلوط شدن دو نوع ماده به وجود می‌آید. ترکیب ۴ پیمانه از ماده اول و ۳ پیمانه از ماده دوم ۱۸۰۰ تومان قیمت دارد و ترکیب ۳ پیمانه از نوع اول و ۵ پیمانه از نوع دوم ۱۹۰۰ تومان قیمت دارد. مخلوطی که دارای ۵ پیمانه از ماده اول و ۶ پیمانه از ماده دوم باشد، چقدر قیمت دارد؟

۱) ۲۷۰۰ ۲) ۲۸۰۰ ۳) ۲۹۰۰ ۴) ۳۰۰۰

۹- سن پدر و برادر علی، به ترتیب سه برابر و نصف سن علی است. اگر مجموع سن آنها با یکدیگر برابر با ۵۴ باشد، اختلاف سنی پدر و برادر علی کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۰

۱۰- در یک کارخانه، حقوق یک مهندس دوبرابر یک فن‌ورز (تکنسین) و $\frac{۲}{۳}$ مدیربخش است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش و۸ مهندس و ۱۲ فن‌ورز دارد. مجموع حقوق این افراد ۵۵/۵میلیون تومان در ماه است. حقوق یک فن‌ورز در این کارخانه ماهیانه چند تومان است؟ (تمرین کتاب)

۱) ۱۲۰۰۰۰۰ ۲) ۱۲۵۰۰۰۰ ۳) ۱۵۰۰۰۰۰ ۴) ۱۵۵۰۰۰۰

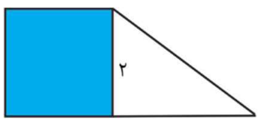
۱۱- در یک کیف پول فقط اسکناس‌های ۱۰۰۰ تومانی، ۵۰۰۰ تومانی و ۱۰۰۰۰ تومانی وجود دارد. تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی سه برابر تعداد اسکناس‌های ۱۰۰۰ تومانی و ارزش کل اسکناس‌های ۱۰۰۰ تومانی ۳۰ درصد ارزش کل اسکناس‌های ۱۰۰۰۰ تومانی است. اگر کل مبلغ موجود در کیف ۴۰۶۰۰۰ تومان باشد، تعداد اسکناس‌های ۱۰۰۰ تومانی کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۱۲- مثلثی به ارتفاع $۲x$ و قاعده $۳x+۶$ با مستطیلی به ابعاد $x+۱$ و $۳x+۲$ هم‌مساحت می‌باشند، محیط مستطیل کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۲ ۳) ۲۰ ۴) ۱۸ (تمرین کتاب)

۱۳- در شکل زیر، مساحت مربع از $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث به اندازه ۳ واحد مربع بیشتر است. مساحت ذوزنقه، کدام است؟(سراسری ۱۴۰۱)



۱) ۵ ۲) ۵/۵
۳) ۶/۵ ۴) ۷

معادله درجه دوم

مرجع کتاب درسی: ریاضی و آمار (۱) ـ فصل اول ـ درس ۲

صورت استاندارد معادله درجه دوم در حالت کلی مطابق الگوی $(a\neq ۰)$ $ax^۲+bx+c=۰$ می‌باشد:

مثال: $۳x^۲+۱۰x+۸=۰$

در معادله درجه دوم استاندارد، $ax^۲$ جمله درجه دو، bx جمله درجه یک و c جمله ثابت نامیده می‌شود.

مثال: در معادله درجه دوم $۳x^۲-۵x+۴=۰$ جمله درجه دو $(۳x^۲)$، جمله درجه یک $(-۵x)$ و جمله ثابت (۴) می‌باشد.

تذکر: ریشه معادله، عددی است که اگر در معادله به جای مجهول جایگزین شود، معادله به یک تساوی صحیح تبدیل می‌شود.

مثال: $x=۳$ ریشه معادله $\frac{x^۲+۷}{x+۱}-x=۱$ می‌باشد، زیرا: $\frac{۳^۲+۷}{۳+۱}-۳=۱\Rightarrow\frac{۱۶}{۴}-۳=۱\Rightarrow۴-۳=۱\Rightarrow۱=۱$

برای تعیین ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ از روش های زیر استفاده می‌کنیم:

الف) حل معادله درجه دوم با استفاده از تجزیه

۱ ـ معادله را به کمک فاکتورگیری و اتحادها تجزیه می‌کنیم.

۲ ـ هر یک از عوامل تجزیه را به‌طور جداگانه مساوی صفر قرار می‌دهیم.

۳ ـ ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم.

مثال: هر یک از معادلات درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید:

الف) $۳x^۲-۵x=۰$ ب) $x^۲-۹=۰$ ج) $x^۲+۵x+۶=۰$ د) $x^۲-۲x+۱=۰$

الف) اگر $c=۰$ بود معادله را با فاکتورگیری حل می‌کنیم: $(a=۳\ ,\ b=-۵\ ,\ c=۰)$

$$۳x^۲-۵x=۰\xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } x}x(۳x-۵)=۰\Rightarrow۳x-۵=۰\ \Rightarrow\ ۳x=۵\ \Rightarrow\ x=\frac{۵}{۳}\ ,\ x=۰$$

ب) اگر $b=۰$ باشد a و c مختلف العلامت باشند معادله با اتحاد مزدوج حل می‌شود: $(a=۱\ ,\ b=۰\ ,\ c=-۹)$

$$x^۲-۹=۰\Rightarrow(x-۳)(x+۳)=۰\ \Rightarrow\begin{cases}x-۳=۰\Rightarrow x=۳\\x+۳=۰\Rightarrow x=-۳\end{cases}$$

ج) این معادله را با اتحاد جمله مشترک حل می‌کنیم، یعنی باید دو تا عدد پیدا کنیم که جمع آنها $+۵$ و ضرب آنها $+۶$ شود:

$$x^۲+۵x+۶=۰\ \Rightarrow\ (x+۲)(x+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x+۲=۰\ \Rightarrow\ x=-۲\\x+۳=۰\ \Rightarrow\ x=-۳\end{cases}$$

د) این معادله را با اتحاد مربع حل می‌کنیم: $x^۲-۲x+۱=۰\Rightarrow(x-۱)^۲=۰\rightarrow x-۱=۰\ \Rightarrow\ x=۱$ یک ریشه مضاعف

ب) حل معادله درجه دوم با استفاده از خاصیت ریشه زوج

۱- چنانچه $b=۰$ باشد معادله را به صورت مقابل بنویسید: $ax^۲+c=۰ \Rightarrow ax^۲=-c$

۲- طرفین معادله را بر ضریب $x^۲$ (یعنی a) تقسیم کنید: $x^۲=\frac{-c}{a}$

۳- اگر $\frac{-c}{a}$ مثبت باشد،از طرفین معادله ریشه بگیرید: $x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

تذکر: اگر $\frac{-c}{a}$ منفی باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال: معادله درجه دوم $۴x^۲-۹=۰$ را به روش خاصیت ریشه‌ی زوج حل کنید:

$$۴x^۲=۹ \Rightarrow \frac{۴x^۲}{۴}=\frac{۹}{۴} \Rightarrow x^۲=\frac{۹}{۴} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۹}{۴}} \Rightarrow x=\pm\frac{۳}{۲}$$

ج) حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل

۱- اگر لازم باشد، جملات معادله را بر ضریب $x^۲$ (یعنی a) تقسیم کنید تا ضریب $x^۲$ عدد ۱ شود.

۲- معادله را به شکل $x^۲+bx=c$ بنویسید.

۳- مقدار $(\frac{b}{۲})^۲$ را به هر دو طرف معادله اضافه کنید تا سه جمله سمت چپ مربع کامل شود.

۴- سه جمله‌ای کامل را به صورت اتحاد مربع دوجمله‌ای بنویسید.

۵- از طرفین معادله ریشه (جذر) بگیرید.

مثال: معادله درجه دوم $۲x^۲+۱۲x-۱۴=۰$ را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم: $۲x^۲+۱۲x-۱۴=۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲+۶x-۷=۰ \quad (a=۱\,,\,b=۶\,,\,c=-۷)$

عدد c را به سمت راست تساوی می‌فرستیم: $x^۲+۶x=۷$

$(\frac{b}{۲})^۲$ را حساب می‌کنیم: $(\frac{b}{۲})^۲=(\frac{۶}{۲})^۲=(۳)^۲=۹$

عددی که به دست آمد (یعنی ۹) به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم: $x^۲+۶x=۷ \xrightarrow{+۹} x^۲+۶x+۹=۷+۹$

سمت چپ معادله اتحاد مربع می باشد: $\underbrace{x^۲+۶x+۹}_{\text{اتحاد مربع}}=۷+۹ \Rightarrow (x+۳)^۲=۱۶$

از هر دو طرف ریشه می‌گیریم: $(x+۳)^۲=۱۶ \Rightarrow (x+۳)=\pm\sqrt{۱۶} \Rightarrow x+۳=\pm۴$

هر دو معادله راجداگانه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+۳=+۴ \Rightarrow x=۴-۳ \Rightarrow x=۱ \\ x+۳=-۴ \Rightarrow x=-۴-۳ \Rightarrow x=-۷ \end{cases}$$

د) حل معادله درجه دوم با تشخیص روابط بین ضرایب

۱ – در معادله درجه دوم اگر مجموع ضرایب برابر صفر باشد یکی از جواب‌های معادله عدد ۱ می‌باشد و جواب دیگر از رابطه‌ی $\frac{c}{a}$ بدست می‌آید:

$$ax^۲+bx+c=۰ \xrightarrow{\text{اگر}\ a+b+c=۰} \Rightarrow (x_۱=۱\,,\,x_۲=\frac{c}{a})$$

مثال: $۳x^۲+۲x-۵=۰ \longrightarrow x_۱=۱\,,\,x_۲=\frac{-۵}{۳}$

۲ – در معادله درجه دوم اگر مجموع ضرایب طرفین برابر با ضریب میانی باشد یکی از جواب‌های معادله (-۱) می‌باشد و جواب دیگر از رابطه‌ی $-\frac{c}{a}$ بدست می‌آید.

$$ax^۲+bx+c=۰ \longrightarrow \text{اگر}\ a+c=b \Rightarrow (x_۱=-۱\,,\,x_۲=-\frac{c}{a})$$

مثال: $۳x^۲+۵x+۲=۰ \longrightarrow x_۱=-۱\,,\,x_۲=\frac{-۲}{۳}$

ه) حل معادله درجه دوم درحالت کلی(روش Δ)

۱ ـ اگر معادله نامرتب باشد، آن‌را طبق الگوی استاندارد مرتب می‌کنیم.

۲ ـ مبین معادله را از رابطه $\Delta = b^{۲} - ۴ac$ (دلتا) محاسبه می‌کنیم .

۳ – با توجه به مبین به دست آمده یکی از حالت های زیر را اجرا می کنیم:

الف) اگر مبین معادله درجه دوم مثبت باشد $(\Delta > ۰)$، معادله دارای دو ریشه حقیقی $x_{۱,۲} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$ می‌باشد.

مثال: $۲x^{۲} + ۵x - ۳ = ۰ \qquad a = ۲ \quad , \quad b = ۵ \quad , \quad c = -۳$

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = ۵^{۲} - ۴(۲)(-۳) = ۲۵ + ۲۴ = ۴۹$$

$$x_{۱,۲} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۵ \pm \sqrt{۴۹}}{۲(۲)} = \frac{-۵ \pm ۷}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x_{۱} = -۳ \\ x_{۲} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

ب) اگر مبین معادله درجه دوم صفر باشد $(\Delta = ۰)$، معادله دارای دو ریشه مساوی (یک ریشه مضاعف) $x_{۱} = x_{۲} = \dfrac{-b}{۲a}$ می‌باشد.

مثال: $۴x^{۲} + ۱۲x + ۹ = ۰ \qquad a = ۴ \quad , \quad b = ۱۲ \quad , \quad c = ۹$

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = ۱۲^{۲} - ۴(۴)(۹) = ۱۴۴ - ۱۴۴ = ۰$$

$$x_{۱} = x_{۲} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۲}{۸} = \frac{-۳}{۲}$$

ج) اگر مبین معادله درجه دوم منفی باشد، $(\Delta < ۰)$ معادله در مجموعه اعداد حقیقی ریشه ندارد.

مثال: $۲x^{۲} + ۵x + ۴ = ۰ \qquad a = ۲ \quad , \quad b = ۵ \quad , \quad c = ۴$

$\Delta = b^{۲} - ۴ac = ۵^{۲} - ۴(۲)(۴) = ۲۵ - ۳۲ = -۷$ ریشه حقیقی ندارد

نکات خاص

نکته ۱) در معادله درجه دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ اگر $c = ۰$ باشد، یکی از ریشه‌های معادله حتماً صفر می‌باشد و ریشه دیگر از رابطه $-\dfrac{b}{a}$ به‌دست می‌آید.

مثال:

$$۳x^{۲} + ۵x = ۰ \longrightarrow x(۳x + ۵) = ۰ \longrightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ ۳x + ۵ = ۰ \longrightarrow x = -\dfrac{۵}{۳} \end{cases}$$

نکته ۲) در معادله درجه دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ اگر $b = ۰$ با شد معادله دارای دو ری شه قرینه ا ست (به شرط آن‌که c,a هم علامت نبا شند) و یا ری شه ندارد (به شرط آن‌که c,a هم علامت باشند).

مثال:

$x^{۲} - ۹ = ۰ \longrightarrow (x - ۳)(x + ۳) = ۰ \longrightarrow x = ۳ \ , \ x = -۳$ دو ریشه قرینه

$x^{۲} + ۹ = ۰ \Rightarrow x^{۲} = -۹$ عبارت نهایی غلط است بنابراین معادله ریشه ندارد.

$۳x^{۲} - ۱۲ = ۰ \rightarrow ۳(x^{۲} - ۴) = ۰ \Rightarrow ۳(x - ۲)(x + ۲) = ۰ \rightarrow x = ۲ \ , \ x = -۲$

$x^{۲} - ۵ = ۰ \rightarrow x^{۲} = ۵ \longrightarrow x = \pm\sqrt{۵}$ دو ریشه قرینه

نکته ۳) در معادله درجه دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ اگر $a = c$ و $\Delta > ۰$ معادله دارای دو ریشه معکوس می‌باشد.

مثال: $۲x^{۲} - ۵x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = b^{۲} - ۴ac = ۹ \Rightarrow x_{۱,۲} = \dfrac{۵ \pm \sqrt{۹}}{۴} \Rightarrow x_{۱} = ۲ \ , \ x_{۲} = \dfrac{۱}{۲}$ دو ریشـــه معکـــوس

نکته ۴) اگر در معادله درجه دوم a و c مختلف‌العلامه باشند، معادله حتماً دو ریشه متمایز مختلف‌العلامه دارد.

مثال: در معادله $۲۰x^{۲} + ۱۵x - ۳۷ = ۰$ چون $a = ۲۰ , c = -۳۷$ مختلف‌العلامه می‌باشند، معادله دو ریشه مختلف‌العلامه دارد.

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ را $x_{۱}$ و $x_{۲}$ بنامیم، بین این ریشه‌ها و ضرایب عددی معادله یعنی a، b و c روابط زیر برقرار است:

مجموع ریشه‌ها : $S = x_{۱} + x_{۲} = \dfrac{-b}{a}$ ضرب ریشه‌ها : $P = x_{۱}.x_{۲} = \dfrac{c}{a}$ تفاضل ریشه‌ها : $|x_{۱} - x_{۲}| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

مثال: در معادله $۲x^{۲} + ۸x + ۵ = ۰$ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را بدون حل معادله بدست آورید.

$$a = ۲ , b = ۸ , c = ۵ \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-۸}{۲} = -۴ \quad , \quad P = \frac{c}{a} = \frac{۵}{۲}$$

تشکیل معادله درجه دوم با معلوم‌بودن ریشه‌های آن

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، به گونه‌ای که مقدار ریشه‌ها معلوم اما صورت معادله نامعلوم باشد، به روش زیر می‌توان صورت معادله را مشخص نمود.

۱ ـ ریشه‌ها را با یکدیگر جمع نموده، عدد حاصل را S می‌نامیم.

۲ ـ ریشه‌ها را در یکدیگر ضرب نموده، عدد حاصل را P می‌نامیم.

۳ ـ مقادیر بدست آمده را در الگوی کلی $x^2-Sx+P=0$ جایگزین نموده، صورت معادله مشخص می‌شود.

مثال: معادله درجه دومی تشکیل بدهید که ریشه‌های آن مقادیر ۳ و ۵ باشند.

$$S=5+3=8 \qquad P=5\times 3=15 \quad \Rightarrow\ x^2-Sx+P=0\ \Rightarrow\ x^2-8x+15=0$$

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

حل معادله و تعیین ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

۱۴- نسبت ریشهٔ بزرگتر معادلهٔ درجه دوم $6x^2-13x-5=0$ به ریشهٔ کوچکتر آن، کدام است؟

۱) $-\frac{15}{2}$ ۲) $-\frac{13}{2}$ ۳) $\frac{15}{2}$ ۴) $\frac{13}{2}$

۱۵- جواب بزرگتر معادلهٔ درجه دوم $x(x-3)+13=5x$، در کدام محدوده است؟

۱) $6<x<6/5$ ۲) $5/5<x<6$ ۳) $5<x<5/5$ ۴) $4/5<x<5$

۱۶- در حل معادله درجه دوم $2x^2+12x-7=0$ به روش مربع کامل، به عبارت $(x+m)^2=k$ رسیده‌ایم. مقدار $2km$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۷۵ ۴) ۱۲۵

۱۷- در معادله درجه دوم $(x-1)^2-2\sqrt{3}(x-1)-6=0$ کوچک‌ترین جواب x کدام است؟ (سراسری۸۷ با تغییر)

۱) $4-\sqrt{3}$ ۲) $2-\sqrt{3}$ ۳) $4+\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{3}-2$

بحث در تعداد و نوع ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

۱۸- کدام یک از معادله‌های زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است ؟ (تمرین کتاب)

۱) $x^۲ - x + a = ۰$ ۲) $x^۲ + ax + ۱ = ۰$ ۳) $x^۲ - ax - ۱ = ۰$ ۴) $ax^۲ - x + ۱ = ۰$

۱۹- معادلهٔ $(k+۱)x^۲ - ۲kx + k + ۳ = ۰$ دارای یک ریشهٔمضاعف است. k کدام است؟ (گزینه دو)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۲۰- ریشهٔ مضاعف معادله درجه دوم $۹x^۲ - ۳mx + m = ۰$ (با شرط $m \neq ۰$) کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۲۱- در کدام محدودهٔ تغییرات k، معادلهٔ درجه دوم $\frac{x^۲}{۲} - ۳x + ۵ + k = ۰$ ، ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۱) $k < -\frac{۱}{۲}$ ۲) $k > -\frac{۱}{۲}$ ۳) $k < \frac{۱}{۲}$ ۴) $k > -۲$

۲۲- معادلهٔ درجه دوم $(a-۱)x^۲ + ۲ax + a = -۳$ در کدام محدودهٔ تغییرات a، همواره دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟

۱) $a < \frac{۳}{۲}$ ۲) $a > \frac{۳}{۲}$ ۳) $a < ۱$ ۴) $a > ۱$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

۲۳- در معادلهٔ درجه دوم $kx^{۲}+۵x+۲-k=۰$، اگر حاصل‌ضرب دو ریشه برابر ۳ باشد، k کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۲۴- در معادله درجه دوم $۲x^{۲}-(m+۱)x+m=۴$ مجموع ریشه‌ها برابر ۵ است، حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۵- در معادلهٔ $۳x^{۲}-۵x+a=۰$، اگر قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر $\frac{۷}{۳}$ باشد، $a^{۲}+۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) $\frac{۱۰}{۹}$

۲۶- در معادلهٔ درجه دوم $۲x^{۲}+(m+۱)x-۱۲=۰$، مجموع دو ریشه $\frac{۵}{۲}$ می‌باشد، ریشهٔ مثبت کدام است؟ (سراسری ۹۷)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۷- در معادله‌ی درجه دوم $۶x^{۲}+(k+۱)x+k=۰$، اگر مجموع دو ریشه‌ی حقیقی برابر $\frac{۱}{۶}$ باشد، ریشه‌ی مثبت آن، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$ (سراسری ۹۴)

۲۸- در معادلهٔ درجه دوم $2x^2 + kx + 1 - k = 0$، اگر حاصل‌ضرب دو ریشه برابر ۵ باشد، ریشهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ (۹۴ خارج)

۲۹- در معادلهٔ درجه دوم $3x^2 + 7x - 2m + 2 = 0$، حاصل‌ضرب دو ریشه ۲− می‌باشد. ریشهٔ بزرگ‌تر کدام است؟(۹۷ خارج)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۰- اگر $x = 2$ یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $3x^2 - 10x + k = 0$ باشد، ریشه دیگر چند است؟

۱) ۸ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۳۱- اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر $x = -4$ باشد، جواب دیگر چند است؟ (تمرین کتاب)

۱) ۱۵ ۲) ۴ ۳) $-\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{2}{7}$

۳۲- به‌ازای یک مقدار m، ریشه‌های معادله $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ معکوس یکدیگرند،مجموع این دو ریشه کدام است؟

۱) ۱/۵− ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳ (۹۵ خارج)

۳۳- در معادله درجه دوم $۴x^۲ - ۴x + a = ۰$ به‌ازای کدام مقدار a یکی از ریشه‌ها ۲ واحد بیشتر از ریشه دیگر است؟ (سراسری ۸۶)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۳۴- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۸x + ۳ = ۰$ باشند. حاصل $۵x_۱ + ۵x_۲ - \frac{۳}{x_۱x_۱}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

۳۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $mx^۲ - ۶mx + ۵m = ۲۴$ باشند و رابطهٔ $\alpha^۲ + \alpha\beta = ۴۲$ برقرار باشد. حاصل $\alpha\beta + m$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) ۳

۳۶- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲ + ۷x - ۳ = ۰$ و $\alpha > ۰$ باشد. حاصل $|\beta| - |\alpha| + |\alpha + ۲\beta|$ کدام است؟ (دی ۱۴۰۱)

۱) $۲\alpha + ۳\beta$ ۲) $-۲\alpha - ۳\beta$ ۳) $-\beta$ ۴) β

تشکیل معادلهٔ درجه ۲

۳۷- ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ + bx + c = ۰$ اعداد -۶ و $\frac{۵}{۳}$ می‌باشند. حاصل $(b - c)$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۳ ۳) ۳۷ ۴) ۴۳

۳۸- جواب کدام معادله به صورت $\frac{۲\pm\sqrt{۳}}{۲}$ است؟ (سراسری ۹۱)

۱) $\frac{x^۲}{۴}-۲x+۱=۰$ ۲) $x^۲-۲x+\frac{۱}{۴}=۰$ ۳) $x^۲-۲x-\frac{۱}{۴}=۰$ ۴) $۴x^۲-۲x-۱=۰$

۳۹- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند به‌طوری‌که $x_۱+x_۲=\frac{۱۱}{۲}$ و $x_۱x_۲=۶$، نسبت ریشه بزرگ‌تر به ریشه کوچک‌تر کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱۱}{۲}$

معادله و مسائل توصیفی

۴۰- چهار برابر مربع عددی از ۱۲ برابر آن عدد، ۹ واحد کوچک‌تر است. معکوس آن عدد کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۴۱- نصف مربع عددی غیر طبیعی از $\frac{۷}{۳}$ آن عدد، ۴ واحد بزرگتر است. آن عدد کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۴۲- در شکل زیر که از کنار هم قرار گرفتن ۴ مثلث یکسان تشکیل شده است، مساحت متوازی‌الاضلاع از مساحت هر مثلث قائم‌الزاویه ۳ واحد بیشتر است. اندازهٔ قطر مربع کدام است؟ (اردیبهشت۱۴۰۳)

۱) ۲
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۳
۴) $\sqrt{۳}$