کنکور ۱۴۰۶

ریاضی و آمار

دهم انسانی

خسرو محمدزاده

- آموزش ساده مفاهیم و نکات بر اساس نظام جدید آموزشی
- پوشش کامل مثال ها، فعالیت ها و تمرینات کتاب درسی
- تیپ‌بندی پرسش های چهارگزینه ای بر اساس کتاب های جدید
- انطباق کامل با سوالات کنکور سال های گذشته

بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه آموزش

ریاضی و آمار(۱)

پایه دهم انسانی

تألیف: خسرو محمدزاده

(نوبت دوم: تیر ۱۴۰۳)

فهرست مطالب: **صفحه**

فصل صفر: پیش‌نیاز ۱

فصل اول – درس۱ : معادله و مسائل توصیفی ۶

فصل اول – درس۲ : معادلهٔ درجهٔ دوم ۱۲

فصل اول – درس۳ : معادله‌های گویا ۲۹

فصل دوم – درس۱و۲ : مفاهیم تابع ۳۵

فصل دوم – درس۳ : نمودار تابع خطی ۴۹

فصل دوم – درس۴ : نمودار تابع درجهٔ دوم ۶۰

فصل سوم : آمار (کار با داده‌های آماری) ۷۲

فصل چهارم : آمار (نمایش داده‌ها) ۸۴

مجموعه اعداد (پیش‌نیاز)

مرجع کتاب درسی: ریاضی نهم

مجموعه‌های عددی:

به مجموعه‌ای که اعضای آن فقط اعداد می‌باشند، مجموعه‌ی عددی گفته می‌شود.

مجموعه‌های عددی مهم عبارتند از:

ـ مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,۵,...\}$

ـ مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,...\}$

ـ مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$

ـ مجموعه اعداد طبیعی زوج: $E=\{۲,۴,۶,۸,...\}$

ـ مجموعه اعداد طبیعی فرد: $O=\{۱,۳,۵,۷,...\}$

ـ مجموعه اعداد اول: $\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,...\}$

➢**تذکر**: عدد اول عددی است که بر هیچ عددی (به‌جز خودش و عدد یک) بخش‌پذیر نمی‌باشد.

ـ مجموعه اعداد گویا: $Q=\{\frac{a}{b} | a,b\in Z \ , \ b\neq ۰\}$

➢**تذکر**: هر عدد کسری و هر عددی که قابل تبدیل به کسر باشد، عدد گویا نامیده می‌شود.

مجموعه اعداد اصم (گنگ): $Q'=Q^C=\{x | x\notin Q\}$

هر عددی که گویا نباشد (قابل تبدیل به کسر نباشد)، عدد اصم نامیده می‌شود.

اعداد اصم دو دسته‌اند:

الف) عدد رادیکالی که جذر کامل نداشته باشد. ب) عدد اعشاری نامتناهی نامتناوب.

مجموعه اعداد حقیقی: $R=(-\infty,+\infty)=Q\cup Q'$

➢**تذکر**: مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌ترین و کامل‌ترین مجموعه عددی می‌باشد که شامل همه اعداد گویا و اصم می‌باشد.

➢**تذکر**: اگر مخرج یک کسر صفر باشد، آن عدد تعریف نشده است و عضو هیچ مجموعه عددی نمی‌باشد.

مجموعه متناهی و نامتناهی

اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود، مشخص و قابل شمارش باشد، آن مجموعه را متناهی، با پایان یا با انتها می‌نامند.

اگر تعداد اعضای یک مجموعه نامحدود، نامشخص و غیرقابل شمارش باشد، آن مجموعه را نامتناهی، بی‌پایان یا بی‌انتها می‌نامند.

نمایش ریاضی مجموعه‌ها

مجموعه‌های عددی را با علائم ریاضی نیز می‌توان نمایش داد که به این طریق مجموعه‌های عددی متنوعی تعریف می‌شود.

مثال:

$B=\{x | ۳\le x<۷ \ , \ x\in W\}=\{۳,۴,۵,۶\}$

$A=\{x | x<۵ \ , \ x\in N\}=\{۱,۲,۳,۴\}$

$D=\{x | x\le ۷ \ , \ x\in E\}=\{۲,۴,۶\}$

$C=\{x | -۱\le x\le ۱ \ , \ x\in Z\}=\{-۱,۰,۱\}$

$F=\{\frac{x^۲}{۱+x^۲} | x\in z \ , \ -۱\le x<۳\}=\{\frac{۱}{۲},۰,\frac{۴}{۵}\}$

$G=\{\frac{۱}{n} | n\le ۵ \ , \ n\in O\}=\{۱,\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۵}\}$

$E=\{۲k | k\in N\}=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,...\}$

$H=\{۲^k | -۱\le k\le ۱ \ , \ k\in Z\}=\{۲^{-۱},۲^۰,۲^۱\}=\left\{\frac{۱}{۲},۱,۲\right\}$

$O=\{۲k-۱ | k\in N\}=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,...\}$

عملیات ریاضی:

در مثال‌های زیر به نحوه‌ی انجام عملیات بین اعداد و علامتِ عدد حاصل دقت نمایید:

$-۵+۲=-۳$ $\quad$ $۵-۲=۳$ $\quad$ $-۵-۲=-۷$ $\quad$ $۵+۲=۷$

$-۵\times۲=-۱۰$ $\quad$ $۵\times-۲=-۱۰$ $\quad$ $-۵\times-۲=۱۰$ $\quad$ $۵\times۲=۱۰$

$\frac{-۳}{۳}=\frac{۳}{-۳}=-\frac{۳}{۳}=-۱$ $\quad$ $\frac{۳}{۳}=۱$ $\quad$ $۳\times۳=۹$ $\quad$ $۳-۳=۰$ $\quad$ $۳+۳=۶$

$$\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\text{کسرها را هم مخرج می نماییم}}\frac{۲\times۴}{۵\times۴}+\frac{۳\times۵}{۴\times۵}=\frac{۸+۱۵}{۲۰}=\frac{۲۳}{۲۰}$$

$$\frac{۲}{۷}+\frac{۳}{۷}=\frac{۲+۳}{۷}=\frac{۵}{۷}$$

$$\frac{۲}{۵}+۳=\frac{۲}{۵}+\frac{۳\times۵}{۱\times۵}=\frac{۲+۱۵}{۵}=\frac{۱۷}{۵}$$

$$\frac{۳}{۷}+۱=\frac{۳}{۷}+\frac{۷}{۷}=\frac{۱۰}{۷}$$

$$\frac{۲}{۵}\times\frac{۷}{۳}=\frac{۲\times۷}{۵\times۳}=\frac{۱۴}{۱۵}$$

$$۳\frac{۲}{۵}=\frac{۳(۵)+۲}{۵}=\frac{۱۷}{۵}$$

$$\frac{\cancel{۱۲}^{۳}}{۷}\times\frac{۵}{\cancel{۸}_{۲}}=\frac{۳\times۵}{۷\times۲}=\frac{۱۵}{۱۴}$$

$$\frac{\cancel{۶}^{۲}}{\cancel{۹}_{۳}}\times\frac{-۴}{۷}=\frac{۲\times-۴}{۳\times۷}=\frac{-۸}{۲۱}$$

$$\frac{۱۳}{۸}\div(-\frac{۷}{۲۰})=\frac{۱۳}{\cancel{۸}_{۲}}\times-\frac{\cancel{۲۰}^{۵}}{۷}=\frac{۱۳\times-۵}{۲\times۷}=\frac{-۶۵}{۱۴}$$

$$\frac{۳}{۷}\div\frac{۵}{۴}=\frac{۳}{۷}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۱۲}{۳۵}$$

$۰-۵=-۵$ $\quad$ $۵-۰=۵$ $\quad$ $۰+۵=۵$ $\quad$ $۵+۰=۵$

تعریف نشده: $\frac{۵}{۰}$ $\quad$ $\frac{۰}{۵}=۰$ $\quad$ $۰\times۵=۰$ $\quad$ $۵\times۰=۰$

بنا به قرارداد، در عبارت‌هایی که عملیات جمع و ضرب انجام می‌شود، اگر ترتیب عملیات با پرانتز مشخص نشده باشد، ابتدا عملیات ضرب و تقسیم به ترتیب از چپ به راست انجام می‌شود، سپس عملیات جمع یا تفریق به ترتیب از چپ به راست انجام خواهد شد.

مثال: $۴\times۳-۲۳+۴۱\times۲=(۴\times۳)-۲۳+(۴۱\times۲)=۱۲-۲۳+۸۲=۷۱$

$$۱۲-۴\times۵\div۲+۷=۱۲-\left[(۴\times۵)\div۲\right]+۷=۱۲-۱۰+۷=۹$$

محاسبات اعشاری:

جهت آشنایی با ضرب اعداد اعشاری در ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و . . . یا تقسیم بر آن به مثال‌های زیر توجه کنید:

$۲۳/۴۵\times۱۰=۲۳۴/۵$ $\quad$ $۲۳/۴۵\div۱۰=۲/۳۴۵$

$۲۳/۴۵\times۱۰۰=۲۳۴۵$ $\quad$ $۲۳/۴۵\div۱۰۰=۰/۲۳۴۵$

$۲۳/۴۵\times۱۰۰۰=۲۳۴۵۰$ $\quad$ $۲۳/۴۵\div۱۰۰۰=۰/۰۲۳۴۵$

توجه داشته باشید که هر عدد طبیعی را می‌توان به عنوان عددی اعشاری با ارقام اعشارِ صفر در نظر گرفت مثلاً:

$۳۵=۳۵/۰۰۰...$

$۲۵۳\div۱۰=۲۵/۳$ $\quad$ $۰/۰۱۴۵\times۱۰=۰/۱۴۵$

$۲۵۳\div۱۰۰=۲/۵۳$ $\quad$ $۰/۰۱۴۵\times۱۰۰=۱/۴۵$

$۲۵۳\div۱۰۰۰=۰/۲۵۳$ $\quad$ $۰/۰۱۴۵\times۱۰۰۰=۱۴/۵$

$۲۵۳\div۱۰۰۰۰=۰/۰۲۵۳$ $\quad$ $۰/۰۱۴۵\times۱۰۰۰۰=۱۴۵$

برای جمع و تفریق دو عدد اعشـاری آن دو را به گونه‌ای زیر هم می‌نویســیم که ممیزهای این اعداد زیر هم قرار بگیرند؛ سـپس طبق قواعدِ جمع اعدادِ طبیعی، با حفظ ممیز در جای خود عمل جمع یا تفریق را انجام می‌دهیم. مثلاً برای جمع دو عدد اعشاری ۲۳/۶۷۲ و ۵/۰۸ داریم:

$$\begin{array}{r} ۲۳/۶۷۲ \\ +\ ۵/۰۸۰ \\ \hline ۲۸/۷۵۲ \end{array}$$

در ضربِ دو عدد اعشاری کافی است نخست ممیز این اعداد را نادیده بگیریم و آن‌ها را مانند دو عدد طبیعی در هم ضرب کنیم. سپس به اندازه‌ی مجموع تعداد ارقام بعد از ممیز آن‌ها، رقم‌های سمت راست عدد بدست آمده را بعد از ممیز قرار دهیم.

مثال: برای ضرب دو عدد اعشاری۱۳/۴ و ۲/۰۷ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$۱۳۴\times۲۰۷=۲۷۷۳۸$

$۱۳/۴\times۲/۰۷=۲۷/۷۳۸$

توان و رادیکال (پیش نیاز)

مرجع کتاب درسی: ریاضی نهم

توان و نما

اگر بخواهیم عددی را چند بار در خود ضرب کنیم، برای خلاصه‌نویسی این عمل، از نماد توان استفاده می‌کنیم. مثلاً:

$۳\times۳\times۳\times۳\times۳=۳^۵$

جهت افزایش سرعت در انجام محاسبات، مقادیر توانی زیر را به‌خاطر بسپارید:

$۲^۱=۲$	$۲^۲=۴$	$۲^۳=۸$	$۲^۴=۱۶$	$۲^۵=۳۲$
$۲^۶=۶۴$	$۲^۷=۱۲۸$	$۲^۸=۲۵۶$	$۲^۹=۵۱۲$	$۲^{۱۰}=۱۰۲۴$
$۳^۱=۳$	$۳^۲=۹$	$۳^۳=۲۷$	$۳^۴=۸۱$	$۳^۵=۲۴۳$
$۴^۱=۴$	$۴^۲=۱۶$	$۴^۳=۶۴$	$۴^۴=۲۵۶$	
$۵^۱=۵$	$۵^۲=۲۵$	$۵^۳=۱۲۵$	$۵^۴=۶۲۵$	
$۶^۱=۶$	$۶^۲=۳۶$	$۶^۳=۲۱۶$		
$۷^۲=۴۹$	$۸^۲=۶۴$	$۹^۲=۸۱$	$۱۰^۲=۱۰۰$	$۱۱^۲=۱۲۱$
$۱۲^۲=۱۴۴$	$۱۳^۲=۱۶۹$	$۱۴^۲=۱۹۶$	$۱۵^۲=۲۲۵$	$۱۶^۲=۲۵۶$
$۱۷^۲=۲۸۹$	$۱۸^۲=۳۲۴$	$۱۹^۲=۳۶۱$	$۲۰^۲=۴۰۰$	$۲۵^۲=۶۲۵$
$۱۰^۱=۱۰$	$۱۰^۲=۱۰۰$	$۱۰^۳=۱۰۰۰$	$۱۰^۴=۱۰۰۰۰$	$۱۰^۵=۱۰۰۰۰۰$
$۱۰^{-۱}=۰/۱$	$۱۰^{-۲}=۰/۰۱$	$۱۰^{-۳}=۰/۰۰۱$	$۱۰^{-۴}=۰/۰۰۰۱$	$۱۰^{-۵}=۰/۰۰۰۰۱$

نکته ۱ ـ هر عدد به توان یک می‌شود، خود عدد. $x^۱=x$

نکته ۲ ـ یک دارای هر توانی باشد می‌شود، یک. $۱^x=۱$

نکته ۳ ـ هر عدد مخالف صفر به توان صفر می‌شود، یک. $x^۰=۱\quad(x\neq۰)$

نکته ۴ ـ صفر اگر دارای توان مثبت باشد می‌شود، صفر.

نکته ۵ ـ عدد منفی اگر دارای توان زوج باشد، حاصل آن مقداری مثبت می‌شود. $(-۵)^۲=۲۵$

نکته ۶ ـ عدد بزرگ‌تر از یک هر چقدر دارای توان بزرگ‌تری باشد، حاصل آن بزرگ‌تر می‌شود.

$a>۱\ ,(n>m)\quad\Rightarrow a^n>a^m$ مثال: $۵^۷>۵^۴$

نکته ۷ ـ عدد بین صفر و یک هرچقدر دارای توان بزرگ‌تر باشد، حاصل آن کوچک‌تر می‌شود.

$۰<a<۱\ ,\ (n>m)\quad\Rightarrow a^n<a^m$ مثال: $(۰/۵)^۷<(۰/۵)^۴$

رادیکال و جذرگیری

عملیات جذرگیری به نوعی بازگشتِ عملیات توانی می‌باشد. به مثال‌های زیر دقت کنید:

$۵^۲=۲۵\longrightarrow\sqrt[۲]{۲۵}=۵\qquad ۴^۳=۶۴\longrightarrow\sqrt[۳]{۶۴}=۴$

$۳^۴=۸۱\longrightarrow\sqrt[۴]{۸۱}=۳\qquad ۲^۵=۳۲\longrightarrow\sqrt[۵]{۳۲}=۲$

یک عبارت رادیکالی در حالت کلی مطابق الگوی زیر می‌باشد:

$\sqrt[n]{A}$ فرجه: $n\in N-\{۱\}$ عبارت زیر رادیکال: $A\in\mathbb{R}$

تذکر: فرجه ۲ معمولاً نوشته نمی‌شود.

لازم است حاصل رادیکال‌های زیر را به‌خاطر بسپارید:

$\sqrt{۰}=۰$	$\sqrt{۱}=۱$				
$\sqrt{۱۰۰}=۱۰$	$\sqrt{۱۲۱}=۱۱$	$\sqrt{۱۴۴}=۱۲$	$\sqrt{۱۶۹}=۱۳$	$\sqrt{۱۹۶}=۱۴$	$\sqrt{۲۲۵}=۱۵$
$\sqrt{۲}\simeq۱/۴$	$\sqrt{۳}\simeq۱/۷$	$\sqrt{۵}\simeq۲/۲$	$\sqrt{۶}\simeq۲/۴$	$\sqrt{۷}\simeq۲/۶$	$\sqrt{۸}\simeq۲/۸$

ساده کردن رادیکال

اگر عدد زیر رادیکال جذر کامل نداشته باشد و یا عدد نسبتاً بزرگی باشد با یکی از روش‌های زیر می‌توان رادیکال را تا حد امکان ساده نمود.

روش اول: ۱ ـ عدد زیر رادیکال را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم.

۲ ـ اگر توان از فرجه کمتر باشد، عبارت زیر رادیکال باقی می‌ماند.

۳ ـ اگر توان با فرجه مساوی باشد، پایه را از رادیکال خارج می‌کنیم.

۴ ـ اگر توان از فرجه بزرگ‌تر باشد، پایه را از رادیکال خارج نموده و از توان عبارت زیر رادیکال به اندازه فرجه کم می‌نماییم.

مثال: $\sqrt{۲۲۵۰}=\sqrt{۲\times ۳^{۲}\times ۵^{۳}}=\sqrt{۲}\times\sqrt{۳^{۲}}\times\sqrt{۵^{۳}}=\sqrt{۲}\times ۳\times ۵\sqrt{۵}=۱۵\sqrt{۱۰}$

روش دوم: ۱ ـ عدد زیر رادیکال را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عدد می‌نویسیم که حداقل یکی از آنها جذر داشته باشد.

۲ ـ جذر عددی که مجذور کامل می‌باشد را گرفته و پشت رادیکال می‌نویسیم.

مثال: $\sqrt{۲۲۵۰}=\sqrt{۲۲۵\times ۱۰}=۱۵\sqrt{۱۰}$

$\sqrt{۳۲}=\sqrt{۱۶\times ۲}=۴\sqrt{۲}$ $\quad \sqrt{۵۰}=\sqrt{۲۵\times ۲}=۵\sqrt{۲}$ $\quad \sqrt{۱۲}=\sqrt{۴\times ۳}=۲\sqrt{۳}$

$\sqrt{۷۲}=\sqrt{۳۶\times ۲}=۶\sqrt{۲}$ $\quad \sqrt{۸۰}=\sqrt{۱۶\times ۵}=۴\sqrt{۵}$ $\quad \sqrt{۱۸}=\sqrt{۹\times ۲}=۳\sqrt{۲}$

$\sqrt{۹۸}=\sqrt{۴۹\times ۲}=۷\sqrt{۲}$ $\quad \sqrt{۲۰}=\sqrt{۴\times ۵}=۲\sqrt{۵}$

جمع و تفریق رادیکال‌ها

رادیکال‌ها فقط درصورتی با یکدیگر جمع و منها می‌شوند که هر دو شرط زیر برقرار باشد.

۱ ـ فرجه رادیکال‌ها با یکدیگر مساوی باشند. ۲ ـ عبارت زیر رادیکال‌ها با یکدیگر یکسان باشند.

مثال: جمع نمـی شـود $=۷\sqrt{۳}+۵\sqrt{۲}$ $\quad ۷\sqrt{۳}+۵\sqrt{۳}=۱۲\sqrt{۳}$

منها نمـی شـود $=۱۰\sqrt[۳]{۵}-۴\sqrt[۲]{۵}$ $\quad ۸\sqrt[۳]{x}-۲\sqrt[۳]{x}=۶\sqrt[۳]{x}$

نکته: برای جمع و منها نمودن رادیکال‌های نامشابه ابتدا هریک از رادیکال‌ها را تا حد امکان ساده می‌کنیم، سپس درباره جمع و تفریق آنها تصمیم می‌گیریم.

$\sqrt{۸}-۵\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}-۵\sqrt{۲}=-۳\sqrt{۲}$ $\quad \sqrt{۵۰}+\sqrt{۱۸}=۵\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}=۸\sqrt{۲}$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

رادیکال‌ها فقط به شرطی با یکدیگر ضرب یا تقسیم می‌شوند که فرجه رادیکال‌ها با یکدیگر مساوی باشند.

در این‌صورت ضرایب با یکدیگر و عبارت زیر رادیکال‌ها با یکدیگر ضرب یا تقسیم می‌شوند:

مثال: $\sqrt{۳}(۵\sqrt{۲})=۵\sqrt{۶}$ $\quad ۲\sqrt{۳}\times ۴\sqrt{۵}=۸\sqrt{۱۵}$

$\sqrt{۳}(۵+\sqrt{۲})=۵\sqrt{۳}+\sqrt{۶}$ $\quad \dfrac{۱۵\sqrt{۱۲}}{۳\sqrt{۳}}=\dfrac{۱۵}{۳}\sqrt{\dfrac{۱۲}{۳}}=۵\sqrt{۴}=۵\times ۲=۱۰$

➢ **تذکر مهم**: حاصل تساوی‌های زیر را با یکدیگر مقایسه کنید.

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=۱$ $\quad \sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$ $\quad \sqrt{a}-\sqrt{a}=۰$ $\quad \sqrt{a}+\sqrt{a}=۲\sqrt{a}$

گویا کردن رادیکال‌ها

اگر در مخرج یک عبارت کسری عبارت رادیکالی وجود داشته باشد، با استفاده از یکی از روش‌های زیر رادیکال را از مخرج کسر حذف نموده و به این ترتیب عبارت کسری را گویا می‌کنیم.

الف) اگر مخرج کسر به‌طور کامل زیر رادیکال با فرجهٔ ۲ باشد، صورت و مخرج کسر را در عبارت مخرج کسر ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۶}{\sqrt{۲}}=\frac{۶\times\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}=\frac{۶\sqrt{۲}}{۲}=۳\sqrt{۲}$$

ب) اگر مخرج کسر دو جمله‌ای باشد و حداقل یکی از آنها زیر رادیکال باشد، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}=\frac{۱(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})}{\underbrace{(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})}_{\text{مزدوج}}}=\frac{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}^{۲}-\sqrt{۳}^{۲}}=\frac{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}{۲}$$

اتحادها و تجزیه (پیش نیاز)

مرجع کتاب درسی: ریاضی نهم

اتحادها

الگوهایی هستند جهت افزایش سرعت در محاسبات عبارات جبری. اتحادهای مهم عبارتند از:

اتحاد مربع مجموع یا تفاضل دو جمله

$$(\text{اولی} + \text{دومی})^{۲} = (\text{اولی})^{۲} + ۲(\text{اولی} \times \text{دومی}) + (\text{دومی})^{۲}$$

$(a+b)^{۲} = a^{۲} + ۲ab + b^{۲}$

$(x+۳)^{۲} = x^{۲} + ۶x + ۹$

$(a+۵)^{۲} = a^{۲} + ۱۰a + ۲۵$

$(۲x+۱)^{۲} = ۴x^{۲} + ۴x + ۱$

$(\sqrt{۳}+۱)^{۲} = \sqrt{۳}^{۲} + ۲\sqrt{۳} + ۱^{۲} = ۳ + ۲\sqrt{۳} + ۱ = ۴ + ۲\sqrt{۳}$

$a^{۲} + ۲a + ۱ = (a+۱)^{۲}$

$x^{۲} + ۴x + ۴ = (x+۲)^{۲}$

$x^{۴} + ۲x^{۲} + ۱ = (x^{۲}+۱)^{۲}$

$۲۵x^{۲} + ۳۰xy + ۹y^{۲} = (۵x+۳y)^{۲}$

$$(\text{اولی} - \text{دومی})^{۲} = (\text{اولی})^{۲} - ۲(\text{اولی} \times \text{دومی}) + (\text{دومی})^{۲}$$

$(a-b)^{۲} = a^{۲} - ۲ab + b^{۲}$

$(x-۳)^{۲} = x^{۲} - ۶x + ۹$

$(a-۲)^{۲} = a^{۲} - ۴a + ۴$

$(\sqrt{۳}-E)^{۲} = ۳ - ۲\sqrt{۳}E + E^{۲}$

$a^{۲} - ۲a + ۱ = (a-۱)^{۲}$

$۴x^{۲} - ۴x + ۱ = (۲x-۱)^{۲}$

$۲۵x^{۲} - ۴۰x + ۱۶ = (۵x-۴)^{۲}$

$x^{۶} - ۲x^{۳} + ۱ = (x^{۳}-۱)^{۲}$

اتحاد مزدوج

$$(\text{اولی} - \text{دومی})(\text{اولی} + \text{دومی}) = (\text{اولی})^{۲} - (\text{دومی})^{۲}$$

$(a+b)(a-b) = a^{۲} - b^{۲}$

$(a-۳)(a+۳) = a^{۲} - ۹$

$(x+۲)(x-۲) = x^{۲} - ۴$

$(۳x-۲y)(۳x+۲y) = (۳x)^{۲} - (۲y)^{۲} = ۹x^{۲} - ۴y^{۲}$

$(a^{۳}-b^{۵})(a^{۳}+b^{۵}) = (a^{۳})^{۲} - (b^{۵})^{۲} = a^{۶} - b^{۱۰}$

$(a^{۷}+۶)(a^{۷}-۶) = (a^{۷})^{۲} - ۶^{۲} = a^{۱۴} - ۳۶$

$(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲) = \sqrt{۵}^{۲} - ۲^{۲} = ۵ - ۴ = ۱$

$a^{۲} - b^{۲} = (a-b)(a+b)$

$a^{۲} - ۲۵ = (a-۵)(a+۵)$

$۴۹a^{۲} - ۸۱b^{۲} = (۷a-۹b)(۷a+۹b)$

$x^{۱۲} - ۱۶ = (x^{۶}-۴)(x^{۶}+۴)$

$(x+۱)^{۲} - y^{۲} = (x+۱-y)(x+۱+y)$

اتحاد جمله مشترک

$$(x+a)(x+b) = \underbrace{x^{۲}}_{\text{مشترک به توان۲}} + \underbrace{(a+b)}_{\text{مجموع دو عدد}}x + \underbrace{(ab)}_{\text{ضرب دو عدد}}$$

$(x+۳)(x+۴) = x^{۲} + ۷x + ۱۲$

$(x-۵)(x+۳) = x^{۲} - ۲x - ۱۵$

$(x+۵)(x-۲) = x^{۲} + ۳x - ۱۰$

$(x-۱)(x-۴) = x^{۲} - ۵x + ۴$

$x^{۲} + ۷x + ۱۰ = (x+۲)(x+۵)$

$x^{۲} - ۷x + ۱۰ = (x-۲)(x-۵)$

$x^{۲} + ۳x - ۱۰ = (x-۲)(x+۵)$

$x^{۲} - ۳x - ۱۰ = (x+۲)(x-۵)$

فاکتورگیری

$۲x + ۲y = ۲(x+y)$

$ab - bc = b(a-c)$

$۱۸x^{۵} - ۱۲x^{۳} = ۶x^{۳}(۳x^{۲}-۲) = ۲\times۳x^{۳}(۳x^{۲}-۲)$

$ax - ay + bx - by = a(x-y) + b(x-y) = (x-y)(a+b)$

$۳x^{۲} + ۵x = x(۳x+۵)$

$x^{۳} + x^{۲} + x = x(x^{۲}+x+۱)$

$m(m+۲) - ۵(m+۲) = (m+۲)(m-۵)$

$(x+۵)^{۲} - \sqrt{۳}(x+۵) = (x+۵)(x+۵-\sqrt{۳})$

دوره‌ی رایگان پیش نیاز محاسبات ریاضی انسانی

قسمت اول – جمع تعدادی عدد:	**قسمت ششم – فاکتورگیری، اتحاد و تجزیه**
https://www.aparat.com/v/hSp8a	https://www.aparat.com/v/xX7nL
قسمت دوم – محاسبات اعشاری:	**قسمت هفتم – دو معادله دو مجهول:**
https://www.aparat.com/v/IF3jc	https://www.aparat.com/v/6tNg3
قسمت سوم – توان و رادیکال:	**قسمت هشتم – عدد گذاری در عبارت و تابع:**
https://www.aparat.com/v/BeHWo	https://www.aparat.com/v/n9vdD
قسمت چهارم – مخرج مشترک‌گیری:	**قسمت نهم – فرمول محیط و مساحت اشکال هندسی:**
https://www.aparat.com/v/Q5U4f	https://www.aparat.com/v/mDH5f
قسمت پنجم – طرفین وسطین:	❋ استفاده از این دوره برای تمام دانش‌آموزان انسانی رایگان می‌باشد. ❋ هر ویدیو شامل درسنامه و کاربرد موضوع در تست‌های کنکور می‌باشد. ❋ ویدیوها جهت سهولت دسترسی در پلتفرم آپارات منتشر شده‌اند.
https://www.aparat.com/v/V7Zme	

معادله درجه اول

هر معادله به‌صورت $ax+b=0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می‌نامند.

حل معادلهٔ درجهٔ اول (تعیین ریشه)

برای هر معادله درجه اول یک عدد وجود دارد که اگر به جای مجهول (x) قرار گیرد طرفین معادله با یکدیگر مساوی خواهند شد. به چنین عددی جواب یا ریشه معادله گفته می‌شود.

مثال:

$4x-7+x=11+2x$

$3x+\frac{5}{2}=x+4$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}$

بحث در نوع و تعداد جواب‌های معادله

برای معادله درجه اول به فرم $ax=b$ سه حالت امکان‌پذیر است.

۱- اگر $a\neq 0$ باشد، معادلهٔ درجهٔ اول بوده و دارای یک ریشه حقیقی می‌باشد.

مثال: $5x+12-x=2x+20$

۲- اگر $a=0$ و $b=0$ باشد، معادله مبهم بوده و بیشمار جواب دارد.

مثال: $5x+12-3x+8=2x+20$

۳- اگر $a=0$ و $b\neq 0$ باشد، معادله غیرممکن (ممتنع یا نشدنی) بوده و جواب ندارد.

مثال: $5x+12-3x=2x+20$

دستگاه معادلات خطی (دو معادله، دو مجهول)

برای حل دستگاه به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱- با انتقال مقادیر مجهول به یک طرف تساوی و مقادیر معلوم به طرف دیگر، معادلات را مرتب می‌کنیم.

۲- با ضرب یک یا هر دو معادله در اعداد مناسب برای یکی از متغیرها ضرایب قرینه ایجاد می‌کنیم.

۳- طرفین معادلات را با یکدیگر جمع نموده به این ترتیب متغیر با ضریب قرینه حذف می‌شود.

۴- با حل معادله‌ی یک مجهولی ایجاد شده مقدار متغیر موجود را بدست می‌آوریم.

۵- مقدار بدست آمده را در یکی از معادلات اولیه جایگزین نموده مقدار متغیر دیگر را نیز تعیین می‌کنیم.

مثال:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 4x+3y=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-7y=3 \\ 3x+5y=20 \end{cases}$$

حل مسأله به کمک معادله

آنچه حل تست‌های این مبحث را مشکل می‌سازد ناتوانی در تبدیل صورت مسئله به معادله ریاضی می‌باشد و آن هم به علت ناتوانی در تبدیل کلمات فارسی به نمادهای ریاضی می‌باشد. سعی می‌کنیم با تبدیل‌های ساده زیر و درنهایت حل چند تمرین، این مشکل را برطرف نماییم.

- سه برابر عددی برابر ۷ است: .... $3x = 7$
- به دو برابر عددی، ۴ واحد اضافه می‌کنیم: .... $2x + 4$
- مجموع عددی با ۵: .... $x + 5$
- نصف عددی: .... $\frac{x}{2}$
- ثلث عددی: .... $\frac{x}{3}$
- ربع عددی: .... $\frac{x}{4}$
- مجذور عددی: .... x^2
- جذر عددی: .... $\sqrt{x}$
- مکعب عددی: .... x^3
- مجموع عددی با نصف آن عدد: .... $x + \frac{x}{2}$
- مجموع سه برابر عددی با ثلث آن عدد، برابر ۵ است: .... $3x + \frac{x}{3} = 5$
- به ربع عددی ۷ واحد اضافه نموده، حاصل ۱۰ می‌شود: .... $\frac{x}{4} + 7 = 10$
- تفاضل عددی از ۵: .... $5 - x$
- تفاضل ۵ از عددی: .... $x - 5$
- تفاضل نصف عددی از دو برابر آن عدد: .... $2x - \frac{x}{2}$
- از عددی ۳ واحد کم می‌نماییم: .... $x - 3$
- از دو برابر عددی، همان عدد را کسر می‌نماییم: .... $2x - x$
- نصف عددی را از سه برابر آن عدد کم نموده، باقیمانده ۷ می‌شود: .... $3x - \frac{x}{2} = 7$
- نسبت عددی به ۵: .... $\frac{x}{5}$
- نسبت عددی به ۲، برابر است با ثلث عدد ۷: .... $\frac{x}{2} = \frac{7}{3}$
- A از B، ۵ واحد بزرگ‌تر است: .... $A = B + 5$
- A از B، ۷ واحد کوچک‌تر است: .... $A = B - 7$
- سه برابر عددی از نصف آن عدد ۱۰ واحد بزرگ‌تر است: .... $3x = \frac{x}{2} + 10$
- عددی از مجذور آن عدد ۱۲ واحد کوچک‌تر است: .... $x = x^2 - 12$
- مجموع نصف عددی با ۷: .... $\frac{x}{2} + 7$
- نصف مجموع عددی با ۷: .... $\frac{x+7}{2}$
- معکوس عددی: .... $\frac{1}{x}$
- قرینه عددی: .... $-x$
- مجموع دو عدد طبیعی (یا حسابی یا صحیح) متوالی: .... $x + (x+1)$
- مجموع دو عدد زوج متوالی: .... $x + (x+2)$
- مجموع دو عدد فرد متوالی: .... $x + (x+2)$

تمرین ۱- معادلات زیر را حل کنید.

$$۲۵x + ۷ - ۱۲x = ۸x + ۵۲$$

$$۲x - \frac{x-۱}{۵} = \frac{۴x+۹}{۳}$$

$$\frac{x+۷}{۳} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱۰+x}{۴}$$

تمرین ۲- مجموع ثلث و دو برابر عددی ۳۵ است آن عدد را بیابید.

تمرین ۳- مجموع سه برابر عددی با نصف آن عدد برابر است با ربع عدد ۷، آن عدد را به‌دست آورید.

تمرین ۴- تفاضل عددی از ۲۵ برابر با ثلث مجموع همان عدد با ۳۵ است. آن عدد چند است؟

تمرین ۵- مجموع دو عدد زوج متوالی ۱۵۴ است. با تشکیل معادله، آن دو عدد را بیابید.

تمرین ۶- مجموع دو عدد فرد متوالی ۱۳۶ است. با تشکیل معادله، آن دو عدد را بیابید.

تمرین ۷- نصف عددی از سه برابر آن عدد ۱۰ واحد بزرگ‌تر است. آن عدد چند است؟

تمرین ۸- « ما و ما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می‌شویم. » با حل این مسئله مشخص کنید ما چند نفریم؟

تمرین ۹- $\frac{۳}{۵}$ از نصف میله‌ای یک متری چند سانتی‌متر است؟

تمرین ۱۰- دانش‌آموزی $\frac{۱}{۳}$ از شبانه‌روز را استراحت می‌کند، ۶ ساعت در مدرسه است، $\frac{۱}{۴}$ شبانه‌روز را به مطالعه‌ی درس‌های خود اختصاص می‌دهد و $\frac{۱}{۸}$ شبانه‌روز را به کارهای پیش آمده اختصاص داده و بقیه‌ی زمان را به فعالیت ورزشی می‌پردازد. این دانش‌آموز در یک شبانه‌روز چند ساعت به ورزش می‌پردازد؟

تمرین ۱۱- از تعداد CD هایی که نسترن داشت نیمی را به برادرش و نیمهٔ بقیه‌اش را به پدرش و نیمهٔ باقی‌مانده را به مادرش داد. او اکنون پنج CD دارد. تعداد CD های نسترن چقدر بوده است؟

تمرین ۱۲- علی و رضا و نیما یک شرکت سهامی تأسیس کرده‌اند که سهم رضا نصف سهم علی و سهم نیما ۳۴ درصد سهام شرکت می‌باشد. سهم علی و رضا را مشخص کنید.

تمرین ۱۳- سن علی ۲ برابر سن نیما و سن سارا $\frac{۱}{۳}$ سن نیما است. اگر مجموع سن هر سه نفر آنها با یکدیگر برابر با ۴۰ باشد، سن هریک را مشخص کنید.

تمرین ۱۴- سن علی ۲ برابر سن رضا و $\frac{۱}{۳}$ سن سارا است. اگر مجموع سن هر سه نفر آنها با یکدیگر برابر با ۵۴ باشد، سن هریک را مشخص کنید.

تمرین ۱۵- ترکیب‌های شیمیایی مختلفی از مخلوط شدن دو نوع ماده به وجود می‌آید. ترکیب ۴ گرم از ماده اول و ۳ گرم از ماده دوم ۱۸۰۰ تومان قیمت دارد و ترکیب ۳ گرم از نوع اول و ۵ گرم از نوع دوم ۱۹۰۰ تومان قیمت دارد. هر یک گرم از هر ماده، چقدر قیمت دارد؟

تمرینات کتاب درسی

تمرینات صفحه ۱۴ کتاب ریاضی و آمار (۱)

۱. هرکدام از عبارت‌های زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوهٔ دو مساوی با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوهٔ عدد یک است.

۲. در یک کارخانه، حقوق یک مهندس دو برابر یک فن‌ورز(تکنسین) و $\frac{۲}{۳}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ فن‌ورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۲۹۶ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک فن‌ورز در این کارخانه ماهیانه چقدر است؟

۳. با توجه به پیش بینی درخواست بازار آهن، کارخانهٔ ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟ اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟