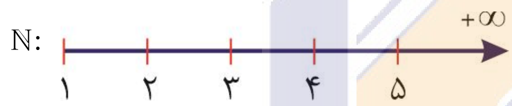
❖ درس اول: مجموعه‌های اعداد

تقریباً اولین کاری که بعد از صدازدن اسم بابا و مامان یاد می‌گیریم شمارشه. یکی، دوتا، سه تا و ...
به این عددها می‌گن اعداد طبیعی. مثلاً یکی از اولین لحظات ذوق‌کردن پدر و مادرا لحظه‌ایه که بچشون می‌تونه تا ۱۰ بشمره. پس اولین مجموعه اعداد شکل گرفت.

اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,...\}$

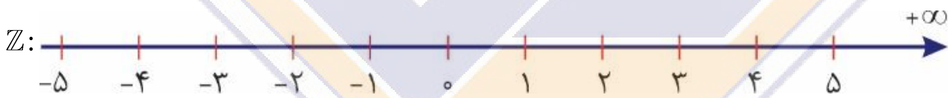
اون سه نقطه یعنی این مجموعه ته نداره و تا قیام قیامت می‌توانی بشمری و جلو بری. به این جور مجموعه‌ها که تعداد اعضاش یه عدد مشخص نیست می‌گن مجموعه‌های نامتناهی.

همه مجموعه‌های اعداد یه محور هم دارند و این محور اعداد طبیعیه:



اگر عدد صفر رو به این مجموعه اضافه کنیم میشه اعداد حسابی:

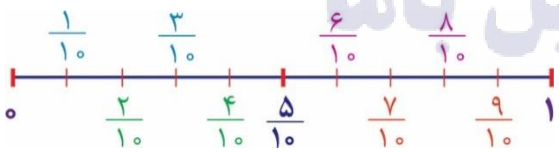
با اضافه شدن اعداد منفی می‌رسیم به مجموعه اعداد صحیح:



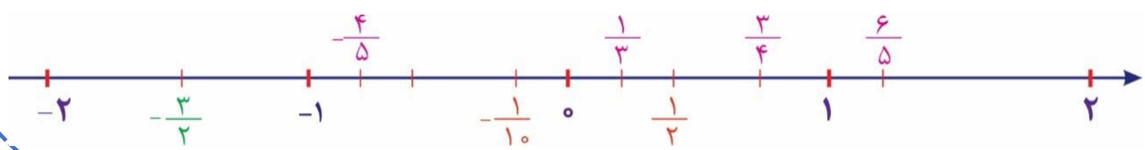
حالا اگر بیایم این محور رو مثل عرض یک رودخونه در نظر بگیریم؛ اعداد صحیح مثل سنگ‌هایی هستن که برای عبور مجبوری به سختی و با احتیاط پاتو روشون بذاری و از رودخونه بگذری. فضاهای خالی بین سنگ‌ها خیلی زیاده.

اینجا بود که اعداد گویا برای پرکردن این فضاهای بسیار زیاد بین هر دو عدد صحیح متولد شدن. اعدادی که به صورت کسری هستن. مثلاً بین صفر و یک بی‌شمار سنگ گویا داریم.

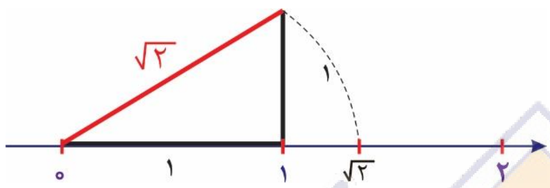
مثلا! ۱۰ تاش رو تو محور روبه‌رو می‌توانی ببینی:

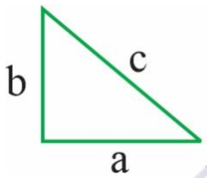


$Q=\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq ۰\}$



البته مجموعه اعداد گویا تمام اعداد صحیح رو هم شامل میشه یعنی ۰ و ۱ و ۱- و ... گویا هم هستند. گفتم که هنوز جای خالی داریم. مثلاً اگر پاره‌خطی به طول یک در نقطه یک به محور اعداد گویا عمود کنیم و یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین رسم کنیم. طول وتر بر اساس رابطه فیثاغورث میشه $\sqrt{۲}$ که هیچ عدد گویایی نمی‌تونه نشونش بده. پس به اعدادی مثل $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ و π و ... می‌گن گنگ که با کمک اعداد گویا عرض بستر رودخونه رو کامل پر می‌کنن.





فیثاغورث

$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$

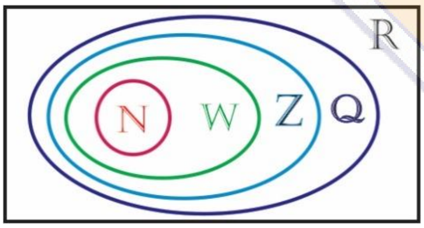
$c^{۲}=۱^{۲}+۱^{۲}=۲$

$\Rightarrow c=\sqrt{۲}$

$Q \cup Q' = \mathbb{R}$eal numbers

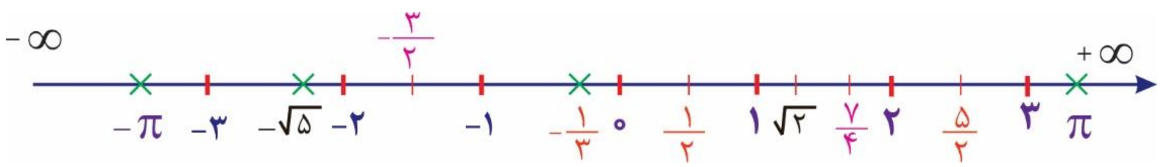
به این میگن اجتماع که جلوتر توضیح می‌دهم

اجتماع اعداد گنگ با گویا میشه مجموعه اعداد حقیقی که با $\mathbb{R}$ نمایش داده میشه. این محور از منفی بی‌نهایت $(-\infty)$ شروع میشه و تا مثبت بی‌نهایت $(+\infty)$ ادامه دارد.



* رابطه بین مجموعه‌های اعداد هم اینه بچه‌ها:

$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$



❖ درس دوم: زیرمجموعه‌های مهم و قوانین توان و رادیکال

۱) اعداد اول

۲) اعداد مرکب

۳) اعداد صحیح زوج

۴) اعداد صحیح فرد

۵) مقسوم‌علیه‌ها یا شمارنده‌ها

۶) مضارب

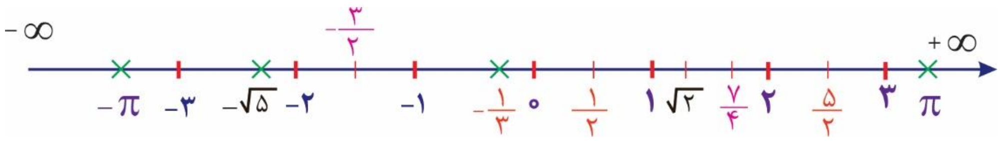
❖ درس سوم: محور اعداد حقیقی و بازه‌ها

۱) $A=\{x|x\in\mathbb{R},a<x<b\}=(a,b)$

۲) $B=\{x|x\in\mathbb{R},a\le x\le b\}=[a,b]$

۳) $C=\{x|x\in\mathbb{R},x>a\}=(a,+\infty)$

۴) $D=\{x|x\in\mathbb{R},x<a\}=(-\infty,a)$



به قطعات این محور بازه گفته می‌شود که در واقع فاصله بین دو عدد و یا فاصله یک عدد تا $+\infty$ و یا از $-\infty$ تا یک عدده. اگر بخواهیم کل فاصله ین دو عدد ۰ تا ۱ رو روی محور اعداد حقیقی نشون بدیم یعنی همه عددهای بین صفر و یک دو تا روش وجود داره:

$۰ < x < ۱$

$x \in (۰ , ۱)$

علامت عضو

تو ریاضی به جای این‌که بگیم عددها میگیم x یا y یا z یا …

این بازه (۰,۱) کل اعداد گویا و گنگ بین دو عدد صحیحی صفر و یک رو نشون میده ولی خود اعداد ۰ و ۱ عضو بازه نیستن. به همین خاطر بهش می‌گن بازه باز ۰ تا ۱ و روی محور اعداد حقیقی این‌طوری نشونش می‌دن:

$۰ < x < ۱$

حالا اگه خود ۰ و ۱ باشن می‌شه بازه بسته:

$۰ \leq x \leq ۱$

ممکنه خود ۰ باشه ولی خود یک نباشه [۰,۱) یا برعکس (۰,۱]

یعنی xهای بین صفر و یک که $۰ \leq x < ۱$

یعنی xهای بین صفر و یک که $۰ < x \leq ۱$

بازه‌های نامتناهی هم داریم:

$(-۱ , +\infty)$ یا $x > -۱$

می‌گیم xهای بزرگ‌تر از ۱-

یا:

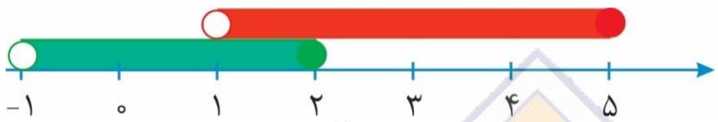
$(-\infty , ۲]$ یا $x \leq ۲$

می‌گیم xهای کوچک‌تر مساوی ۲

چون بین بازه‌ها مجموعه هستن پس قوانین مجموعه‌ها هم براشون برقراره.

۱) اجتماع $(\cup)$

از اسمش مشخصه که دو تا بازه با هم جمع می‌شن.



$(-۱,۲] \cup (۱,۵] = (-۱,۵]$

۲) اشتراک $(\cap)$

اینم که معلومه دیگه. جاهایی که بین دو یا سه بازه مشترکه:

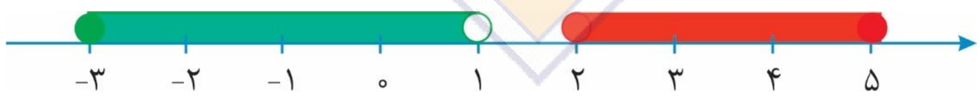
$(-۱,۲] \cap (۱,۵] = (۱,۲]$

می گیم تهی $(\varnothing)$

بعضی مجموعه‌ها اشتراک ندارن و به صورت اجتماع دو بازه هستن:

اجتماع روبه‌رو رو می‌تونیم به این صورت هم نشون بدیم:

$[-۳,۱) \cup [۲,۵]$



یعنی در بازهٔ $[-۳,۵]-[۱,۲)$

$\underbrace{-۳ \le x < ۱}_{x\text{ها}} \quad \cup \quad \underbrace{۲ \le x \le ۵}_{x\text{ها}}$

بازه $[۱,۲)$ رو حذف کردیم و بیرون کشیدیم.

❖ درس چهارم: اتحادهای جبری

با فرض این‌که ۴ عمل اصلی رو بلدید می‌رسیم سراغ اعمال جبری با متغیرها و قوانین توان و ریشه. به هر عبارتی که به صورت $\boxed{Ax^n}$ باشه یک Monomial یا یک‌جمله‌ای گفته می‌شه که $A\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{W}$. مثلاً $2x^3$ یا $-3x$ یا $\sqrt{5}\,x^7$ یا $\frac{1}{3}x^2$ همگی یک Monomial هستن. راستی اگر توان صفر باشه متغیر از بین می‌ره یعنی x به توان صفر میشه ۱ و دیگه x پوچ می‌شه و فقط ساده‌ترین Monomial باقی می‌مونه که همون عدد ثابته. مثلاً ۲ یا $-\frac{1}{5}$ یا $\sqrt{7}$.

حالا سؤالی که اینجا برای بچه‌هایی که بیشتر دقت و توجه می‌کنن پیش میاد اینه که مگه توان می‌تونه یه عدد منفی یا کسری باشه؟! در پاسخ باید بگم متأسفانه بله.

$$x^{-a}=\frac{1}{x^a} \longrightarrow x^{-1}=\frac{1}{x} \quad , \quad x^{-2}=\frac{1}{x^2} \quad , \quad x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$x^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{x^n} \longrightarrow x^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{x^1}=\sqrt{x} \to$ می‌خونیم رادیکال x و فرجه دو را نمی‌نویسیم

$x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

و می‌خونیم رادیکال x به توان ۳ و فرجه ۵ : $x^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{x^3}$

تو بخش بعدی حتماً بیشتر با محاسبات رادیکال‌ها آشنا می‌شیم. برگردیم به ادامه صحبتمون در مورد قوانین حاکم بر عبارات جبری

اگر بین دو تا Monomial علامت جمع (+) یا تفریق (-) بیاد میشه Binomial که ترجمه کردن دوجمله‌ای.

- مثلاً $2x+1$ یک دوجمله‌ای درجه اوله چون توان جمله رهبر یکه. x^2-5x یک دوجمله‌ای درجه دومه و x^3+7 یک دوجمله‌ای درجهٔ سوم. مسلماً اگه یک Monomial دیگه هم اضافه بشه می‌شه سه‌جمله‌ای؛

- مثلاً $3x^2-7x+4$ یک سه‌جمله‌ای درجهٔ دومه. کلاً به این عبارت‌ها Poly nomial یا چندجمله‌ای گفته می‌شه.

- مثلاً $5x^2-2x^3+7x+\frac{1}{9}$ میشه چهارجمله‌ای درجه ۳ که البته فرم نوشتاریش استاندارد نیست، چون جمله رهبر باید اول باشه یعنی اینجوری:

$$-2x^3+5x^2+7x+\frac{1}{9}$$

اگه بخوایم دو جمله رو در هم ضرب کنیم، نشون پرانتز می‌ذاریم.

- مثلاً $(-2x)(3x)=-6x^2$

بالاخره رسیدیم به اتحادهای جبری و البته اثبات همشون همراه با مثال‌های عالی

a ضربدر a چی میشه؟! میشه aa که می‌گن a^2 یعنی a به توان ۲.

حالا $(a+b)$ ضربدر $(a+b)$ چی میشه؟! میشه $(a+b)^2$ که می‌گن به توان ۲

اگه بخوایم یه جمله رو در دو جمله ضرب کنیم در واقع این جملات رو درهم توزیع و پخش می‌کنیم که به این خاصیت می‌گن توزیع‌پذیری. مثلاً a ضربدر $(b+c)$ اینجوری میشه:

$$a\times(b+c)=a\,(b+c)=ab+ac$$

حالا اگر هر دو دوجمله‌ای باشن چی؟!

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

یه خاصیت خیلی کاربردی دیگه هم تو جمع و ضرب داریم به اسم جابجایی

$$a+b=b+a\quad,\quad a\times b=b\times a\quad\Rightarrow\quad ab=ba$$

* بچه‌ها برای $a\times b$ تو نوشتار حرفه‌ای ضرب رو نمی‌ذارن و می‌گن همون ab یعنی ضرب.

$$(a+b)+(b+a)=(a+b)+(a+b)=2(a+b)$$

$$ab+ba=ab+ab=2ab$$

۱ـ اتحاد اول: مربع دوجمله‌ای:

$$(a+b)(a+b)=\underbrace{aa}_{a^2}+\underbrace{ab+ba}_{2ab}+\underbrace{bb}_{b^2}\Rightarrow(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)(a-b)=aa+a(-b)+(-b)a+(-b)(-b)\Rightarrow(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

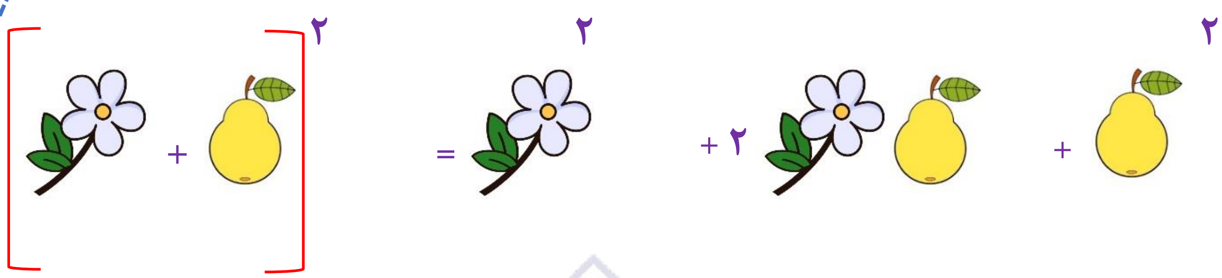
حالا ⊕ و ⊖ با هم:

$$\boxed{(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2}$$

این شد فرم کامل اتحاد اول. دقت کنید این نه فرموله! و نه یک معادلهٔ معمولی.

یک معادلهٔ معمولی بر اساس درجش می‌تونه از صفر تا n تا ریشه داشته باشه یعنی به ازای یک تعداد مقدار متناهی برقرار باشه (معادله درجه یک یک جواب داره؛ درجه ۲ حداکثر به ازای ۲ تا عدد برقراره یعنی وقتی می‌گه $x^2-2x=0$ فقط اعداد صفر و ۲ توش صدق می‌کنن.

ولی اتحاد همیشه درسته. یعنی به جای a و b، گل و گلابی هم بذاری درست در میاد.



حالا متوجه منظورم شدی؟ به جای a و b هرچی بذاری معادله برقراره. به همین خاطر بهش می‌گن اتحاد جبری (Algebric union). اگه از چپ به راست بریم میشه بسط دوجمله‌ای و اگه از راست به چپ بریم میشه تجزیه:

$$(a+b)^{۲} \underset{\text{تجزیه}}{\overset{\text{بسط}}{\rightleftharpoons}} a^{۲}+۲ab+b^{۲}$$

به جای a و b می‌تونی x و y بذاری یا هر عددی رو میتونی بذاری. معروف‌ترین کاربردهای اتحاد اول تو ریاضی این ۴ تاست:

$(۱)\quad (x+۱)^{۲}=x^{۲}+۲x+۱$

$(۲)\quad (x+۲)^{۲}=x^{۲}+۴x+۴$

$(۳)\quad (x+۳)^{۲}=x^{۲}+۶x+۹$

$(۴)\quad (۲x+۱)^{۲}=۴x^{۲}+۴x+۱$

۲- اتحاد دوم: مکعب دو جمله‌ای (توان ۳)

$$(a+b)^{۳}=(a+b)(a+b)^{۲}=(a+b)(a^{۲}+۲ab+b^{۲})$$

حالا اگر این دو تا رو تو هم توزیع کنیم میشه:

$$a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$$

$$\Rightarrow (a+b)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$$

مهم‌ترین مثال از این اتحاد $(x\pm۱)^{۳}$ هستش که خیلی پر کاربرده.

$$(x+۱)^{۳}=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱\quad,\quad (x+۲)^{۳}=x^{۳}+۶x^{۲}+۱۲x+۸$$

این دوتای بالا خیلی معروفه و تجزیشون رو هم باید بلد باشین یعنی اگه دیدین:

$$x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱ \xrightarrow{\text{سریع تبدیل کنید}} (x+۱)^{۳}$$

$$x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۷=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱+۶=(x+۱)^{۳}+۶$$

$$x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۳=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۱-۲=(x-۱)^{۳}-۲$$

۳ـ اتحاد سوم: مزدوج

$$(a+b)(a-b) = aa \underbrace{-ab}_{} + \underbrace{ba}_{} \underbrace{-bb}_{}$$

$$a^2 \quad ab-ab \quad b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

این اتحاد خیلی کاربردیه و حتی تو گویاکردن کسرها و خیلی از مباحث جبری جزو پر استفاده‌ترین اتحادهاست. سعی می‌کنیم برای آشنایی هرچه بیشتر چشماتون بهترین مثال‌هاش رو اینجا براتون بنویسیم. ☺

البته از سمت تجزیه!

$x^2-1=(x-1)(x+1)$, $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)$

$x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)$, $x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$

$x^2-4=(x-2)(x+2)$, $x^2-9=(x-3)(x+3)$

۴ـ چاق و لاغر

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 \cancel{-a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} \cancel{-ab^2} + b^3$$

$$\Rightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

و به همین ترتیب $\Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

➢ مثال‌های مهم:

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$; $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$; $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$

اگر لازم بود:

$$x-1=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

۵- اتحاد آخر: جمله مشترک

این اتحاد در ۹۹٪ موارد برای تجزیه و حل معادله استفاده میشه، ولی بسطش هم خوبه و می‌تونه مفید باشه.

$$(x+a)(x+b) = x^۲ + bx + ax + ab = x^۲ + \underbrace{(a+b)}_{\text{اول}}\, x + \underbrace{ab}_{\text{دوم}}$$

یعنی وقتی ضرب می‌کنی اول جمعشون بعداً ضربشون!!

$$(x+۲)(x+۳) = x^۲ + (\text{جمعشون})\, x + \text{ضربشون} = x^۲+۵x+۶$$

$$(x-۵)(x+۴) = x^۲ + (\text{جمع } -۵ \text{ و } ۴)\, x + \text{ضربشون} = x^۲-x-۲۰$$

ولی بیشتر سمت تجزیه کاربرد داره بچه‌ها:

$$\underbrace{x^۲ + ۷x + ۱۲}_{} = (x+۴)(x+۳)$$

جمعشون ضربشون اول ضرب

※ نکته مهم اینه که درسته اول جمعه ولی تو همیشه اول از ضرب کمک بگیر و بعد با جمع چک کن.

حالا بریم با توجه به مثال قبلی یک الگوریتم خیلی باحال برای تجزیه به این اتحاد با هم ببینیم:

ضرب چه عددهایی میشه ۱۲ ?

$$\boxed{۱ \times ۱۲} \xrightarrow{۱+۱۲} ۱۳$$

$$\boxed{۲ \times ۶} \xrightarrow{۲+۶} ۸$$

$$\boxed{۳ \times ۴} \xrightarrow{۳+۴} ۷$$

حالا اگر گفته بود $x^۲-x-۱۲$ انتخابتون ۳ و ۴ بود که علامت ۴ منفیه چون جمعشون باید ۱- باشه.

ممکنه بعد از پیداکردن ضرب نتونی جمعشون رو با اعداد یک رقمی درست کنی و اونجاست که می‌ری سراغ دو رقمی؛ مثلاً وقتی بهت می‌گه $x^۲+۱۸x+۷۲$ اول نگاه می‌کنی به ضربشون که شده ۷۲ و ناخودآگاه یاد ۸ و ۹ می‌افتی. بعد می‌بینی جمعشون نمی‌تونه ۱۸ باشه. پس می‌ری سراغ یه دورقمی و از ۱۱ شروع می‌کنی. ۱۱ ضربدر چیزی ۷۲ نمیشه ولی ۱۲×۶ میشه.

$$\Rightarrow x^۲+۱۸x+۷۲ \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x+۱۲)(x+۶)$$

۱. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نهایی مرداد ۱۴۰۲)

الف) تابع $y=\sqrt{۳}\,x^{۳}-\pi x+۱$ یک تابع چندجمله‌ای است.

۲. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نهایی خرداد ۱۴۰۱)

الف) تابع $f(x)=\sqrt{۲}\,x-x^{۲}$ یک تابع درجه دوم است.

۳. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نهایی خرداد ۱۴۰۱)

الف) تابع $y=۲x(۱-۳x^{۲})+۱$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه سوم است.

۴. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نهایی دی‌ماه ۱۴۰۱)

الف) تابع $y=\sqrt{۲}x^{۳}-\frac{۳}{۴}x$ یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است.

۵. اگر $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-۴}=۲$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-۴}-۲$ کدام است؟ (تجربی تیر ۱۴۰۳)

۱) صفر	۲) ۱	۳) $\frac{a}{۴}$	۴) $\frac{a}{۲}$

۶. فرض کنید $a=\sqrt[۴]{\sqrt{۶}-۲}$ و $b=\sqrt[۴]{\sqrt{۶}+۲}$ باشند، مقدار $(a^۲+b^۲-۲ab)^۲(a^۲+b^۲+۲ab)^۲$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

۱) $۴(۲+\sqrt{۳})$ ۲) $۴(۲-\sqrt{۳})$ ۳) $۱۶(۲+\sqrt{۳})$ ۴) $۱۶(۲-\sqrt{۳})$

۷. فرض کنید $a=\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}$، مقدار $(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^۲(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^۲$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۹ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۴۹

۸. حاصل عبارت $\sqrt{۱+\sqrt{۷}}\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}}$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) $\sqrt[۴]{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt[۴]{۲}$

❖ درس پنجم: نمودار انواع تابع، یکنوایی و دامنه و برد و انتقال

۹. اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟ (نهایی خرداد ۱۴۰۰)

ورودی $x \to 2x-2 \to \dfrac{x}{\sqrt{x}+1} \to$ خروجی

۱۰. اگر خروجی از ماشین شکل مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی آن کدام است؟

(تست کنکور خارجی تجربی)

۱) $\frac{11}{9}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نهایی خرداد ۱۴۰۱)

ب) تابع $f(x)=x^3$، تابعی اکیداً صعودی است.

۱۲. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نهایی دی‌ماه ۱۴۰۰)

ب) نمودار تابع $y=x^2$ در بازه $(0,1)$ پایین‌تر از، نمودار تابع $y=x^3$ است.

پ) هر تابع یکنوا، یک به یک است.

۱۳. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نهایی مرداد ۱۴۰۳)

ب) تابع $y = \tan x$ در بازه $(\pi$ و $2\pi)$ صعودی است.

۱۴. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نهایی مرداد ۱۴۰۳)

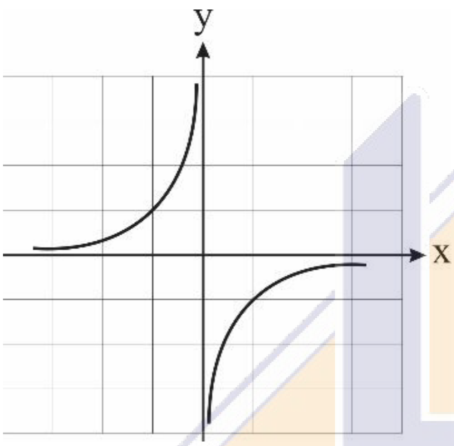
ب) تابع $y = \tan x$ در مجموعه $[0,2\pi]-\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}$، اکیداً صعودی است.

پ) خط $x = 2$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ در نقطه $(2,0)$ است.

۱۵. با توجه به نمودار تابع زیر، تعیین کنید: (نهایی شهریور ۱۴۰۲)

الف) تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً یکنوا است.

ب) آیا تابع در کل دامنه خود اکیداً یکنوا است؟



۱۶. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نهایی دی‌ماه ۱۴۰۲)

ب) تابع تانژانت در بازه $(-\pi,\pi)$، تابعی صعودی است.

۱۷. جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. (نهایی خرداد ۱۴۰۰)

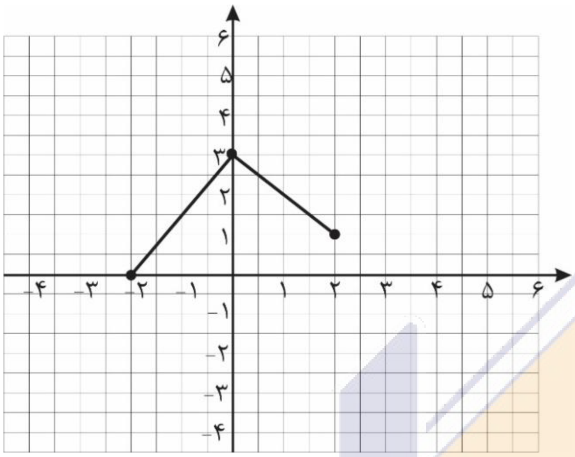
الف) به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، .... می‌گوییم.

ب) برد تابع تانژانت $y = \tan x$ برابر .... است.

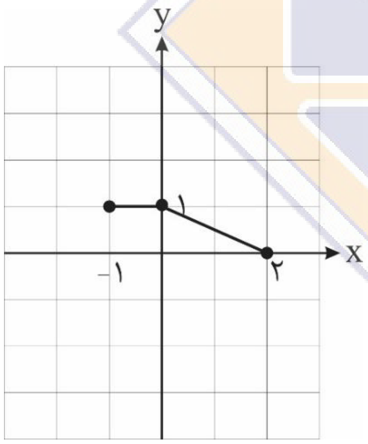
۱۸. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نهایی شهریور ۱۴۰۲)

ب) تابع $y=\frac{1}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست.

۱۹. نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه تابع g را تعیین کنید. (نهایی خرداد ۱۴۰۱)



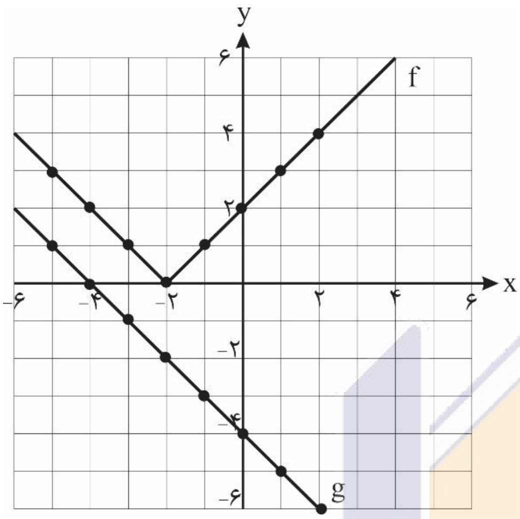
۲۰. نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = f(x-1) + 2$ را رسم کرده و دامنه تابع $g(x)$ را تعیین کنید. (نهایی شهریور ۱۴۰۰)



۲۱. ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x-1|$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است. (نهایی دی‌ماه ۱۴۰۰)

۲۲. الف) با توجه به نمودار توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید.

(نهایی دی‌ماه ۱۴۰۰)



۱) $(g^{-1}of^{-1})(۲)$

۲) $(gof)(-۱)$

ب) نمودار تابع $f(x-۲)-۳$ را رسم کنید.

۲۳. جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. (نهایی خرداد ۱۴۰۳)

الف) تابع $g(x)=x^۲-۴x+۵$ در بازه $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر .... است.

۲۴. ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x$ را رسم نمایید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است. (نهایی خرداد ۱۴۰۱)

۲۵. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نهایی دی‌ماه ۱۴۰۱)

ب) نمودار تابع $y=-(x-۳)^۳$ را می‌توان با ۳ واحد انتقال نمودار $y=-x^۳$ به سمت راست رسم کرد.

پ) تابع $f(x)=x^۲-۴x$ روی بازه $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲۶. نمودار تابع $y = -x^{3} + 2$ را رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص کنید.

(نهایی مرداد ۱۴۰۳)

۲۷. به کمک انتقال نمودار تابع $y = x^{3}$ نمودار تابع $f(x) = (x-2)^{3} + 1$ را رسم کنید.

(نهایی خرداد ۱۴۰۳)

۲۸. نمودار تابع $g(x) = x^{3} - 3x^{2} + 3x$ را به کمک انتقال نمودار $f(x) = x^{3}$ رسم کنید. سپس اکیداً یکنوایی تابع $g(x)$ را در تمام دامنه خود، بررسی کنید.

(نهایی خرداد ۱۴۰۲)

۲۹. جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

(نهایی شهریور ۱۴۰۲)

الف) اگر برد تابع $y = \sqrt{x}$ بازه $[0, 2]$ باشد، برد تابع $y = 2 + \sqrt{x-2}$ برابر .... است.

۳۰. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & x<0\\ x^{2} & x>0\end{cases}$ را رسم کنید. بزرگ‌ترین بازه‌ای که این تابع در آن اکیداً صعودی است را بنویسید. (نهایی مرداد ۱۴۰۳)

۳۱. ابتدا نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}(x-2)^{3} & x\geq 1\\ -2 & 0\leq x<1\\ |x+1| & x<0\end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است. (نهایی دی‌ماه ۱۴۰۲)

۳۲. نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$ را به کمک نمودار $y=\cos x$ در بازه $[0,2\pi]$ رسم کنید.
(نهایی خرداد ۱۴۰۰)

۳۳. ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) ۲ و ۰ ۲) ۱ و ۱- ۳) ۲ و ۱- ۴) ۱ و ۲-

۳۴. اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y=-5x^2+ax-8$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $(-\infty, 2/5]$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟ (ریاضی تیر ۱۴۰۳)

۱) ۱۳/۷۵ ۲) ۱۴/۲۵ ۳) ۲۳/۲۵ ۴) ۲۴/۷۵

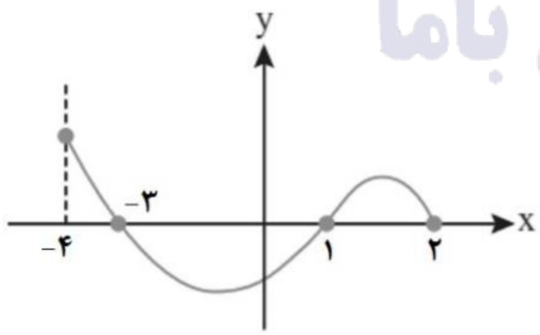
۳۵. شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $[0,2]$

۲) $[-3,2]$

۳) $[-4,-3]\cup[1,2]$

۴) $[-3,0]\cup[1,2]$



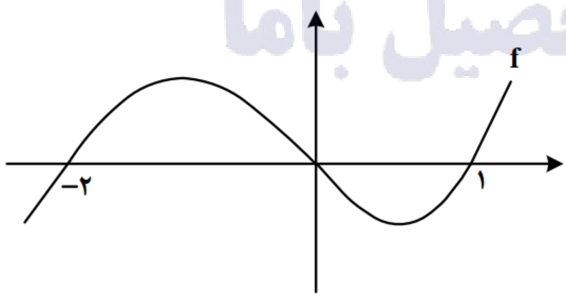
۳۶. اگر تابع f روی R اکیداً نزولی است. اگر $f(۳) = ۰$ باشد، دامنهٔ $g(x) = \sqrt{x^۲ f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۷. دامنهٔ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{\log_{\frac{۱}{۲}} x}}$، شامل چند عدد صحیح است؟ (کنکور تجربی دی‌ماه ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۸. نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{-\dfrac{f(x)}{f(۲+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (تجربی ۱۴۰۲)



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۵

❖ درس ششم: رسم دقیق تابع درجه یک یا خطی

۳۹. هر یک از جمله‌های زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. (نهایی مرداد ۱۴۰۳)

الف) تابع .... هم صعودی و هم نزولی است.

۴۰. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نهایی خرداد ۱۴۰۲)

الف) بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است.

۴۱. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نهایی خرداد ۱۴۰۳)

الف) اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، تابع $f + g$ نیز در آن فاصله اکیداً نزولی است.

۴۲. جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. (نهایی شهریور ۱۴۰۱)

الف) اگر تابعی در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع در آن فاصله .... است.

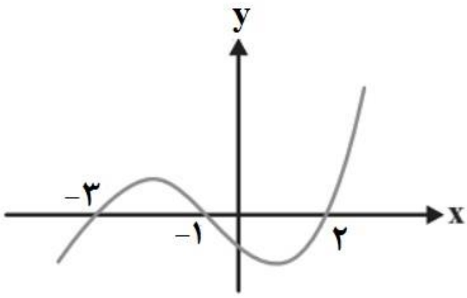
۴۳. جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. (نهایی دی‌ماه ۱۴۰۱)

الف) اگر مقدار a برابر .... باشد، تابع $f(x) = ax + b$ هم صعودی و هم نزولی است.

۴۴. با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -3x & -1<x<0 \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی می‌باشد. (نهایی خرداد ۱۴۰۰)

۴۵. شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $g(x)=\sqrt{(x+۱)f(x)}$ کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۷)



۱) $[-۳,۲]$

۲) $[-۱,+\infty)$

۳) $(-\infty,-۱]$

۴) $\mathbb{R}-(-۳,۲)$

۴۶. معادلهٔ $\sqrt{۲-x}-\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}=\sqrt{۲x-۳}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

(کنکور تجربی دی‌ماه ۱۴۰۱)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۴۷. برد تابع $f(x)=۲x-۱$ با دامنهٔ $[۰,۲]$ کدام گزینه است؟

۱) $\{-۱,۳\}$ ۲) $[-۱,۳]$ ۳) $\{-۱,۱,۳\}$ ۴) $(-۱,۳)$

۴۸. اگر دامنهٔ تابع خطی $g(x)=-2x+2$، بازهٔ $[-2,3]$ باشد، برد این تابع کدام است؟

۱) $[-6,6]$ ۲) $[-4,6]$ ۳) $[-4,4]$ ۴) $[4,6]$

۴۹. اگر دامنهٔ هر یک از توابع $f(x)=-2x+6$ و $g(x)=\frac{2}{3}x-1$ برابر $[-3,3)$ باشد، آن‌گاه اشتراک برد دو تابع شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۵۰. اگر برد تابع $f(x)=3x-2$ بازهٔ $[-3,2)$ باشد، دامنهٔ این تابع کدام است؟

۱) $[-11,4)$ ۲) $(-3,2]$ ۳) $[-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ ۴) $(\frac{1}{3},\frac{4}{3}]$

۵۱. تابع خطی و غیرثابت $f(x)=(a-۲)x^۲+bx+۲a-b$ با دامنهٔ $D_f=[-۲,۵)$ مفروض است. اگر $f(۳)=۰$ باشد، برد تابع f کدام است؟

۱) $(-۱۰,۴]$ ۲) $[-۱۰,۴)$ ۳) $(-۴,۱۰]$ ۴) $[-۴,۱۰)$

۵۲. تابع $f(x)=mx^۲-nx-k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعه زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{۵})$ کدام است؟ (کنکور تجربی دی‌ماه ۱۴۰۱)

$\{(m,n-۱),(۰,k),(n-۱,m^۲+۲m-۱),(۳k+۲,۲k+۱)\}$

۱) -۱ ۲) $-\sqrt{۵}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۵}$

۵۳. دو تابع $f(x)=b-۳ax$ و $g(x)=c-(۳b-۳)x$ ثابت هستند. اگر $f+g=۵$ باشد، حاصل bc چقدر است؟

(تجربی ۱۴۰۱)

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) ۶

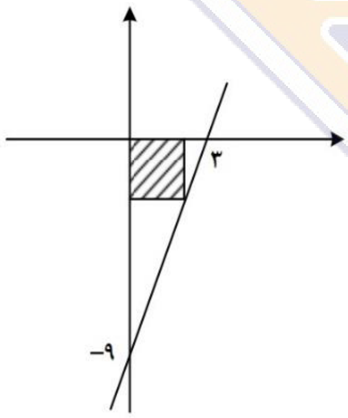
۵۴. اگر $f(x)=(ax+2)(b-x)-7x^2$ ضابطهٔ یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟

(تجربی خارج ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $-\frac{4}{7}$ ۴) $\frac{4}{7}$

۵۵. در شکل زیر، قطر مربع هاشورخورده، کدام است؟

(ریاضی تیر ۱۴۰۳)



۱) $2/5\sqrt{2}$

۲) $3/5\sqrt{2}$

۳) $\frac{9}{2\sqrt{2}}$

۴) $\frac{9}{\sqrt{2}}$