

حسابان یازدهم

ریاضی تجربی یازدهم

فصل ۱: جبر و معادله

- درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی ...
- درس دوم: معادلات درجه دوم ...
- درس سوم: معادلات گویا و گنگ ...
- درس چهارم: قدر مطلق و ویژگی‌های آن ...
- درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی ...

فصل ۲: تابع

- درس اول: آشنایی بیشتر با تابع ...
- درس دوم: انواع توابع ...
- درس سوم: وارون تابع ...
- درس چهارم: اعمال روی توابع ...

فصل ۳: توابع نمایی و لگاریتمی

- درس اول: تابع نمایی ...
- درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم ...
- درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی ...

فصل ۴: مثلثات

- درس اول: رادیان ...
- درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا ...
- درس سوم: توابع مثلثاتی ...
- درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا ...

فصل ۵: حد و پیوستگی

- درس اول: مفهوم حد و فرایندهای حدی ...
- درس دوم: حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست) ...
- درس سوم: قضایای حد ...
- درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری (حالت  $\frac{0}{0}$ ) ...
- درس پنجم: پیوستگی ...

فصل ۱- هندسه تحلیلی و جبر | ۱

- درس اول - هندسه تحلیلی | ۲
- درس دوم - معادله درجه دوم و تابع درجه ۲ | ۱۱
- درس سوم - معادلات گویا و معادلات رادیکالی | ۱۹

فصل ۲- هندسه | ۲۵

- درس اول - ترسیم‌های هندسی | ۲۶
- درس دوم - استدلال و قضیه تالس | ۳۱
- درس سوم - تشابه مثلث‌ها | ۴۲

فصل ۳- تابع | ۴۷

- درس اول - آشنایی با برخی از انواع توابع | ۴۸
- درس دوم - وارون یک تابع و تابع یک به یک | ۵۷
- درس سوم - اعمال جبری روی توابع | ۶۵

فصل ۴- مثلثات | ۷۱

- درس اول - واحدهای اندازه‌گیری زاویه | ۷۲
- درس دوم - روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی | ۷۷
- درس سوم - توابع مثلثاتی | ۸۸

فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی | ۹۵

- درس اول - تابع نمایی و ویژگی‌های آن | ۹۶
- درس دوم - تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن | ۱۰۵
- درس سوم - نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی | ۱۱۵

فصل ۶- حد و پیوستگی | ۱۱۹

- درس اول - فرایندهای حدی | ۱۲۰
- درس دوم - محاسبه حد توابع | ۱۲۸
- درس سوم - پیوستگی | ۱۳۷

فصل ۷- آمار و احتمال | ۱۴۳

- درس اول - احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل | ۱۴۴
- درس دوم - آمار توصیفی | ۱۵۳



# فصل اول

## هندسه تحلیلی

## جبر و معادله

تحصیل باما



پایه یازدهم

## معادله خط:

برای نوشتن معادله هر خط به ۲ عامل احتیاج داریم:

۱- مختصات یک نقطه روی خط

۲- شیب خط

فرم کلی معادله خط گذرنده از نقطه  $A(x_0, y_0)$  با شیب  $m$  عبارتند از:

**مثال:** معادله خط گذرا از نقطه  $A(2, 3)$  و شیب  $m = -2$  را بنویسید.

**مثال:** معادله خط گذرنده از نقاط  $A(2, 5)$  و  $B(0, -3)$  را بنویسید.

**تست:** خطی با شیب  $-\frac{2}{3}$  از نقطه  $A(-3, 5)$  می‌گذرد. مساحت مثلث محدود به این خط و محورها کدام

است؟ (مدارس برتر تهران)

$$\frac{9}{2} \quad (1)$$

$$\frac{9}{4} \quad (2)$$

$$\frac{27}{4} \quad (3)$$

$$\frac{27}{8} \quad (4)$$

تحصیل باما

**به این موارد توجه کنید.**

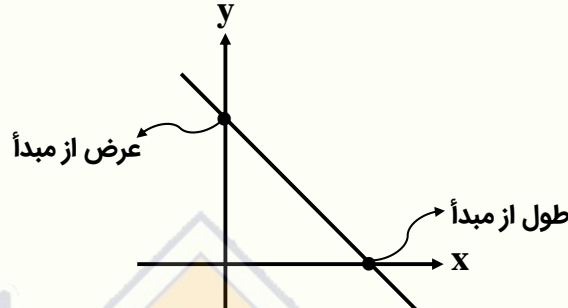
بچه‌ها شما باید در هر حالتی از معادله خط بدون تغییر ظاهر آن بتوانید اطلاعات مورد نیاز را استخراج کنید.

$$y = ax + b \longrightarrow$$

$$ax + by + c = 0 \longrightarrow$$

## عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط راست:

نقطه تلاقی خط با محور  $y$  ها را عرض از مبدأ و نقطه تلاقی خط با محور  $x$  ها را طول از مبدأ خط می‌گوئیم.



بنابراین برای بدست آوردن عرض از مبدأ یک خط کفایت در معادله خط:

و برای بدست آوردن طول از مبدأ یک خط کفایت در معادله خط:

**مثال:** در هر یک از معادلات داده شده، شیب، عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط را بدست آورید.

**الف)**  $3x + 4y = 12$

**ب)**  $2x - 3y + 5 = 0$

**ج)**  $-4x - 2y + 11 = 0$

تحصیل باما

**تست:** معادله خط به طول از مبدأ  $a$  و عرض از مبدأ  $b$  کدام است؟ ( $ab \neq 0$ ) (مدارس برتر تهران)

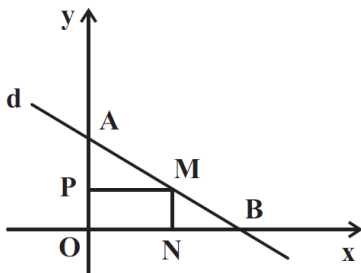
$$ax + by = 1 \quad (1)$$

$$bx + ay = 1 \quad (2)$$

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \quad (3)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (4)$$

**تست:** در شکل مقابل خط  $d$  به معادله  $x + 2y - 4 = 0$  محورهای  $x$  و  $y$  را به ترتیب در نقاط  $A$  و  $B$  قطع می‌کند و  $M$  وسط پاره خط  $AB$  است. مساحت مستطیل  $OPMN$  کدام است؟ (آزمون کانون)

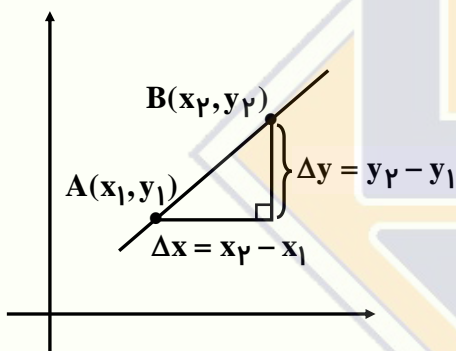


- ۲ (۱)
- ۴ (۲)
- ۶ (۳)
- ۸ (۴)

### شیب خط:

**بیان‌های مختلف از شیب:** (هر آنچه درباره شیب خط باید بدانید.)

شیب خط چیست؟



\* شیب یک خط عبارتست از نسبت جابجایی عمودی به جابجایی افقی.

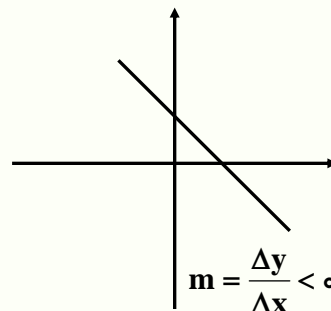
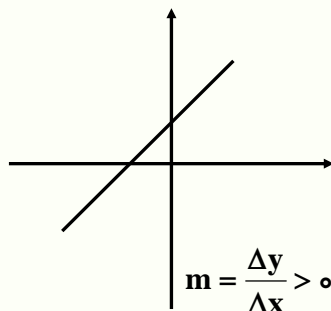
به عبارت دیگر شیب یک خط برابر است با نسبت تفاضل عرض‌های هر دو نقطه دلخواه روی خط به تفاضل طول‌های همان دو نقطه.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

\* اگر  $\Delta x$  را یعنی تغییرات طولی را یک در نظر بگیریم شیب همان  $\Delta y$  است پس اگر شیب خط یک باشد یعنی به

ازای  $\Delta x = 1$  یعنی یک واحد که به سمت راست محور  $x$  ها حرکت کنیم خط یک واحد بالا می‌آید. شیب یک خط ۲ است

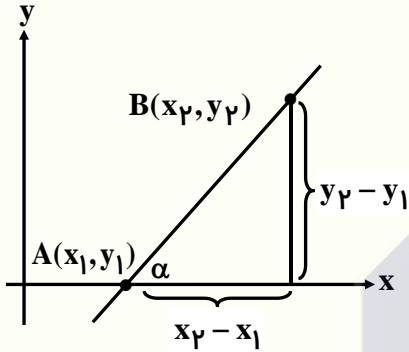
یعنی اگر یک واحد به جلو برویم خط دو واحد بالا می‌آید. شیب یک خط -۳ است یعنی اگر یک واحد به جلو برویم خط ۳ واحد پایین می‌آید.



\* شیب عددی است که نشان می‌دهد خط چقدر به محور  $y$  ها نزدیک است.

پس هر چقدر شیب بیشتر شود خط .....

و هر چه شیب خط کمتر شود خط .....



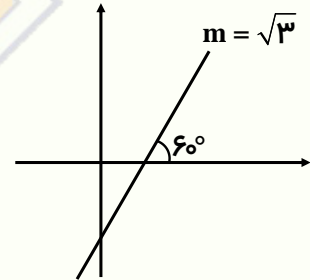
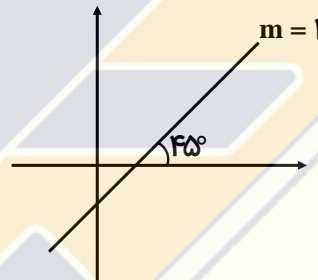
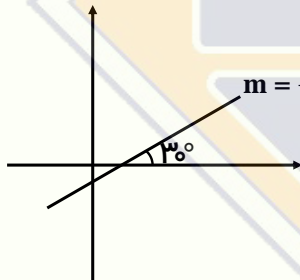
\* شیب یک خط تاثرات زاویه خط با جهت مثبت محور  $x$  هاست.

مثلاً اگر خطی با جهت مثبت محور  $x$  ها زاویه  $30^\circ$  بسازد شیب

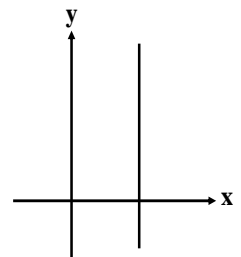
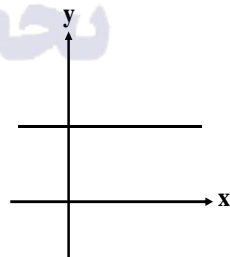
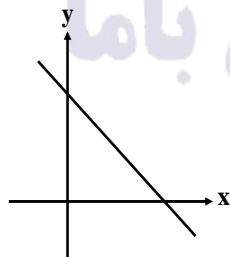
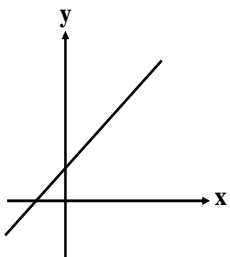
آن  $m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$  است. همچنین اگر شیب خطی ۱ باشد زاویه آن

با جهت مثبت محور  $x$  ها  $45^\circ$  است چون  $\tan 45^\circ = 1$  می‌باشد.

$$\tan \alpha = \frac{\text{تن}}{\text{مجاور}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$



**مثال:** وضعیت شیب خطوط زیر را مشخص کنید.



## بعد از درک مفهوم شیب می‌رویم سراغ کلی تست و سؤال:

**تست:** اگر طول نقطه‌ای روی یک خط به شیب  $m = -2$  را ۳ واحد افزایش دهیم. مقدار تغییرات عرض نقطه کدام است؟

- (۱) ۶ واحد زیاد می‌شود
- (۲) ۶ واحد کم می‌شود
- (۳) ۳ واحد زیاد می‌شود
- (۴) ۳ واحد کم می‌شود

**تست:** معادله خطی که محور  $x$  ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده و از نقطه‌ای به عرض ۲ روی خط  $y = 2x - 2$  می‌گذرد، کدام است؟

- (۱)  $y = -2x + 6$
- (۲)  $y = 2x + 4$
- (۳)  $y = 2x$
- (۴)  $y = -2x + 2$

**تست:** زاویه خطی که از نقاط  $A(1, 0)$  و  $B(0, 1)$  می‌گذرد با جهت مثبت محور  $x$  ها کدام است؟

- (۱)  $45^\circ$
- (۲)  $135^\circ$
- (۳)  $30^\circ$
- (۴)  $90^\circ$

**تست:** خطی که از نقاط متمایز  $A(1, 3m + 4)$  و  $B(-m, 1)$  می‌گذرد، محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع کرده است. این خط محور  $x$  ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

- (۱)  $\frac{5}{3}$
- (۲)  $-\frac{3}{5}$
- (۳)  $\frac{4}{5}$
- (۴)  $-\frac{5}{3}$

**تست:** اگر خط به معادله  $(2m-1)x + 2y = 5m$  دارای شیب  $-\frac{7}{3}$  باشد، عرض از مبدأ این خط کدام

است؟ (آزمون کانون)

- (۱) ۲۰
- (۲) ۱۴
- (۳) ۱۰
- (۴) ۴

**تست:** خط  $4x + 3y = 24$  محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث AOB کدام است؟

- (۱) ۱۲
- (۲) ۲۴
- (۳) ۳۶
- (۴) ۴۸

**تست:** اگر خط  $x - 3y = 5$  معادله یک قطر لوزی باشد، قطر دیگر محور X ها را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع می‌کند. طول مرکز لوزی کدام است؟

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

**تست:** خطی که با راستای مثبت محور X ها زاویه  $45^\circ$  می‌سازد و محور عرض‌ها را در ۲ قطع می‌کند از کدامیک از نقاط زیر عبور می‌کند؟ (مدارس برتر تهران)

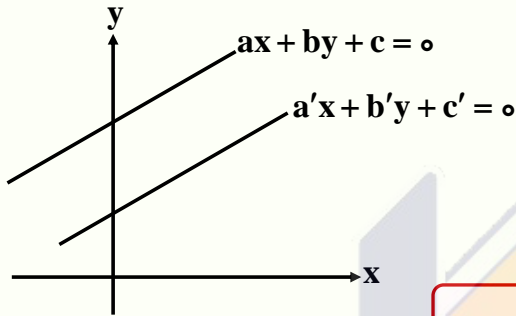
- (۱)  $(-1, 3)$
- (۲)  $(1, 2)$
- (۳)  $(1, 3)$
- (۴)  $(-3, -3)$



## وضعیت نسبی دو خط در صفحه

دو خط در صفحه یا موازیند (و در حالت خاص منطبق) و یا متقاطعند (و در حالت خاص عمود) که مفصل این حالت‌ها را با همه جزئیات توضیح خواهیم داد.

### دو خط موازی (در حالت خاص منطبق)



دو خط موازیند هرگاه شیب‌های برابر داشته باشند. مثلاً

خط  $y = 2x + 7$  و  $y = 2x - 9$  با هم موازیند.

به عبارتی دیگر دو خط به معادلات  $ax + by + c = 0$

و  $a'x + b'y + c' = 0$  موازیند اگر و تنها اگر:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

شرط انطباق دو خط

### مثال:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 7 = 0 \\ 4x + 6y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{7}{-9}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 7 = 0 \\ 4x + 6y + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{7}{14}$$

**مثال:** معادله خط گذرا از نقطه  $A(3, 4)$  و موازی خط به معادله  $2x + 5y = 3$  را بنویسید.

تحصیل باما

**تست:** به ازای کدام مقدار  $m$  و دستگاه معادلات  $\begin{cases} x + my = 1 \\ 2x + (m + 2)y = 3 \end{cases}$  فاقد جواب است؟

(۱) -۲

(۲) -۳

(۳) ۲

(۴) ۳

**تست:** به ازای کدام مقدار  $m$  دستگاه معادلات  $\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases}$  دارای بیشمار جواب

است؟ (داخل تجربی ۹۳)

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۳

(۴) هیچ مقدار  $m$

**تست:** اگر دستگاه  $\begin{cases} 4x + (a - 1)y = 2 \\ (a - 1)x + y = a - 2 \end{cases}$  فاقد جواب باشد، آن گاه خط به معادله  $(a - 2)x + ay = 3$ ، بر کدام یک

از خطوط زیر عمود است؟

(۱)  $y - 3x = 3$

(۲)  $y + \frac{1}{3}x = 4$

(۳)  $2x - 6y = 4$

(۴)  $4y - 12x = 6$

**تست:** به ازای کدام مقدار  $b$  خطی که از نقطه  $A(-2, 3)$  و مبدأ مختصات می‌گذرد با خط  $y = \frac{3}{b}x + 2$

موازی است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) -۱

(۴) -۲

تحصیل باما

**تست:** عرض از مبدأ خطی که از نقطه  $(2, -3)$  موازی خط گذرنده بر دو نقطه  $(1, 4)$  و  $(-1, 5)$  رسم شود،

کدام است؟

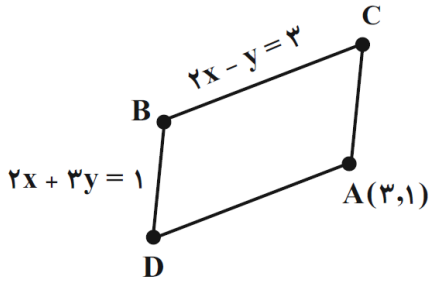
(۱) -۴

(۲) -۲

(۳) ۳

(۴) ۴

**تست:** در متوازی الاضلاع شکل مقابل عرض نقطه D کدام است؟



-۱ (۱)

۱ (۲)

صفر (۳)

۲ (۴)

**تست:** معادله خطی که به موازات نیمساز ناحیه اول و سوم بوده و نیمساز ناحیه دوم و چهارم را در نقطه‌ای به

طول  $x = 2$  قطع می‌کند، کدام است؟ (آزمون جامع سنجش)

 $y + x = 4$  (۱) $y + x = -4$  (۲) $y - x = 4$  (۳) $y - x = -4$  (۴)

**تست:** به ازای کدام مقدار  $m$  نقاط  $A(2,3)$  و  $B(-1,2)$  و  $C(m+1,m)$  بر روی یک خط قرار دارند (بر یک

استقامت‌اند)؟

 $\frac{1}{3}$  (۱) $\frac{7}{3}$  (۲)

۴ (۳)

۳ (۴)

**فاصله دو خط موازی:**

$$\text{_____} \quad ax + by + c = 0$$

$$\text{_____} \quad ax + by + c' = 0$$

**توجه شود که:** .....

**مثال:** نشان دهید دو خط با معادلات  $5x - 12y + 8 = 0$  و  $-10x + 24y + 10 = 0$  باهم موازیند. سپس فاصله این دو

خط را محاسبه کنید.

**تست:** دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادله  $y - ax = 1$  و  $ay - x = a - 1$  واقع هستند. اگر قطر

مستطیل برابر ۵ و نقطه  $(1, 2)$  یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟ (نگور تجربی دهام ۱۴۰۱)

(۱)  $2/5$

(۲)  $3/5$

(۳)  $\sqrt{46}$

(۴)  $2\sqrt{34}$

**تست:** دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط  $2x - 2y = 3$  و  $y = x + 1$  هستند. مساحت این مربع کدام

است؟ (تجربی داخل ۹۲)

(۱)  $\frac{9}{8}$

(۲)  $\frac{9}{4}$

(۳)  $\frac{25}{8}$

(۴)  $\frac{25}{4}$

**تست:** دو خط  $y = 2x - 3$  و  $4x - 2y = 8$  مفروض‌اند. مساحت بزرگ‌ترین دایره‌ای که به‌طور کامل بین این دو خط

قرار می‌گیرد کدام است؟

(۱)  $20\pi$

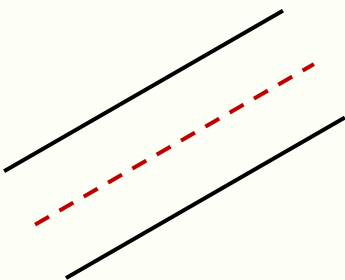
(۲)  $10\pi$

(۳)  $\frac{\pi}{20}$

(۴)  $\frac{\pi}{10}$

تحصیل باما

معادله خط وسط دو خط موازی



**تست:** دو خط به معادلات  $2x + 4y = 2$  و  $x + 2y = 6$  بر دایره‌ای مماس‌اند. اگر مرکز دایره روی خط  $y = 1$  باشد، طول مرکز دایره کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$   
 (۲)  $\frac{2}{3}$   
 (۳)  $-\frac{3}{2}$   
 (۴)  $-\frac{2}{3}$

### دو خط متقاطع (در حالت خاص عمود)

همه چیز درباره دو خط تقاطع

اگر دو خط موازی نباشند یعنی شیب‌های برابر نداشته باشند قطعاً متقاطع‌اند:



**تذکر:** برای بدست آوردن نقطه تقاطع (نقطه هم‌رسی) دو خط کافیست با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول نقطه تلاقی را بدست آورید.

**مثال:** اگر نقطه  $A(a+1, 2b-4)$  محل تلاقی دو خط به معادلات  $3x - y = 4$  و  $-x + 5y = -6$  باشد مقادیر  $a$  و  $b$  را بدست آورید؟

تحصیل باما

**مثال:** معادله خطی را بنویسید که از محل تلاقی دو خط به معادلات  $x + 2y = 5$  و  $2x - y = 0$  و نقطه  $(3, 5)$  می‌گذرد؟

**تست:** به ازای کدام مقدار  $k$ ، خط  $2x + ky = k - 3$  از محل برخورد دو خط  $2y + x = 5$  و  $3y - 2x = 4$  می‌گذرد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) -۵

(۴) ۵

**تست:** سه خط  $x + y + 1 = 0$  و  $2x + 3y + 1 = 0$  و  $mx + 7y = 5$  از یک نقطه می‌گذرند،  $m$  کدام است؟

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) ۱

**نکته:** اگر در معادله خط ضرایب  $x$  و  $y$  را پارامتری دادند آن معادله

**تست:** تمام خطوط به معادله  $(k+1)y - 2kx = 3k - 1$  از نقطه  $A(\alpha, \beta)$  می‌گذرند.  $\alpha^2 \beta^2$  کدام است؟

(۱) ۸

(۲) -۸

(۳) ۴

(۴) -۴

**نیم‌ساز زاویه بین دو خط متقاطع:**

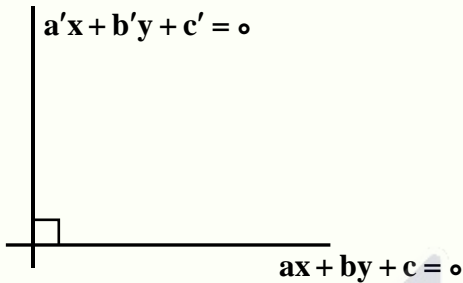
**تست:** نیم‌ساز زاویه بین دو خط  $l_1: 4y - 3x - 10 = 0$  و  $l_2: 3y - 4x + 2 = 0$  با شیب مثبت از نقطه‌ای با کدام

مختصات عبور می‌کند؟

(۱)  $(2, 10)$ (۲)  $(-\frac{1}{7}, 1)$ (۳)  $(\frac{2}{3}, 5)$ (۴)  $(-3, 15)$

## دو خط عمود برهم

دو خط متقاطع با شیب‌های  $m$  و  $m'$  برهم عمودند اگر و تنها اگر  $mm' = -1$  یعنی شیب‌های دو خط عمود برهم عکس و قرینه یکدیگرند.



**مثال:** دو خط  $2x + 3y = 1$  و  $3x - 2y + 7 = 0$  برهم عمودند زیرا:

**تست:** خطی که از نقطه  $A(1, 2)$  عبور می‌کند و بر خط  $y - x = 1$  عمود است. چه مساحتی با محورهای مختصات

می‌سازد؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴/۵

۴) ۹

تحصیل باما

**تست:** اگر در دوزنقه قائم‌الزاویه فرضی زیر مختصات رأس‌ها به صورت  $A(m, n)$ ،  $B(3, 5)$ ،  $C(-1, 4)$  و  $D(1, 2)$

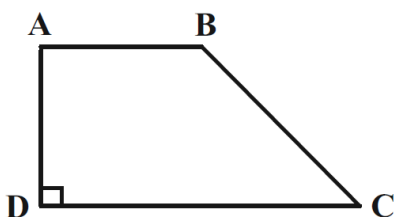
باشد، مقدار  $5m - n$  کدام است؟

۱) ۱۱

۲) -۱۰

۳) ۱۳

۴) -۱۲

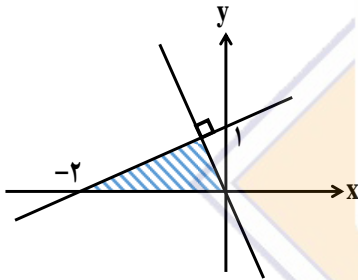


**تست:** از نقطه‌ای به طول ۶ روی محور  $x$  ها خط  $d$  را بر خط  $2y + 3x = 7$  عمود می‌کنیم. عرض از مبدأ خط  $d$  کدام

است؟

- (۱) -۹
- (۲) ۹
- (۳) -۴
- (۴) ۴

**تست:** در شکل مقابل مساحت ناحیه هاشور خورده کدام است؟



- (۱) ۰/۶
- (۲) ۰/۸
- (۳) ۱/۳
- (۴) ۱/۲

**تست:** اگر خطوط  $y = (k + 2)x + 3$  و  $ky - x - 5 = 0$  معادلات قطرهای یک مربع باشند، فاصله نقطه تلاقی دو

قطر مربع از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{15}$
- (۲)  $\sqrt{17}$
- (۳)  $\sqrt{18}$
- (۴)  $\sqrt{19}$

تحصیل باما



**تست:** دایره‌ای به مرکز  $O(1, -1)$  از نقطه  $A(4, 3)$  می‌گذرد. عرض از مبدأ خط مماس بر دایره و گذرنده از نقطه  $A$  کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) صفر

(۴) ۶

**تست:** در یک مستطیل، نقاط  $A(5, 2)$  و  $C(4, -1)$  دو رأس غیرمجاور و دو رأس  $B$  و  $D$  روی خط  $x - 3y = 3$  واقع‌اند. اختلاف طول نقاط  $B$  و  $D$  کدام است؟ (داخل ۱۴۰۳ - تیرماه)

(۱) ۳

(۲)  $3/5$ 

(۳) ۱

(۴)  $1/5$ 

**تست:** در مستطیل  $ABCD$  معادله ضلع  $BC$  بصورت  $y = 3x - 1$  و طول رأس  $B$  برابر ۱ است. معادله ضلع  $AB$  کدام است؟ (مبارس برتر تهران)

(۱)  $3x + y = 5$ (۲)  $3x - y = 1$ (۳)  $3y + x = 7$ (۴)  $3y - x = 5$ 

تحصیل با ما

**تست:** نقاط  $A(-1, 4)$ ،  $B(3, 1)$ ،  $C(x, y)$  و  $D(-1 - x, y + 3)$  رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های  $D$  و  $C$  مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟ (انگور تجربی داخل ۱۴۰۲)

(۱) ۱۳

(۲) ۱۴

(۳) ۱۵

(۴) ۱۶

**تست:** در مثلث ABC با رئوس  $A(1,0)$  و  $B(0,3)$  و  $C(-1,-1)$  عرض از مبدأ ارتفاع AH کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) -۱
- (۳)  $-\frac{1}{4}$
- (۴)  $\frac{1}{4}$

**تست:** اگر خط  $y_1 = (a-1)x + 3$  بر دو خط  $y_2 = (b-3)x + 1$  و  $y_3 = (4-b)x + 2$  عمود باشد، مقدار  $a^2 + b^2$  کدام است؟

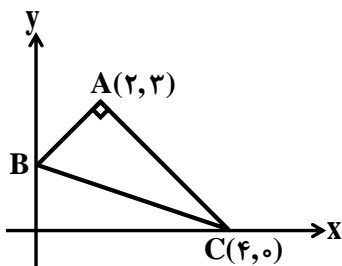
- (۱) ۱۹
- (۲)  $16/5$
- (۳)  $9/75$
- (۴)  $13/25$

**تست:** خط به معادله  $x + y = 4$  بر دایره‌ای به مرکز  $W(1,-2)$  در نقطه M مماس است. مختصات نقطه M کدام است؟

- (۱)  $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$
- (۲) (۱, ۳)
- (۳) (-۱, ۵)
- (۴)  $(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$

تحصیل با ما

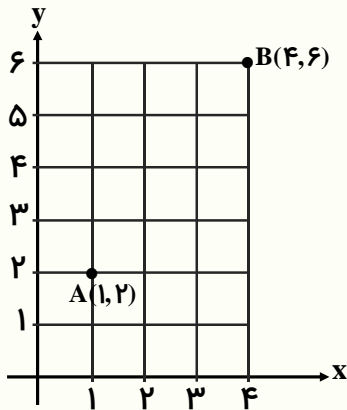
**تست:** با توجه به شکل مقابل عرض نقطه B کدام است؟



- (۱)  $\frac{5}{4}$
- (۲)  $\frac{2}{4}$
- (۳)  $\frac{3}{4}$
- (۴)  $\frac{1}{4}$

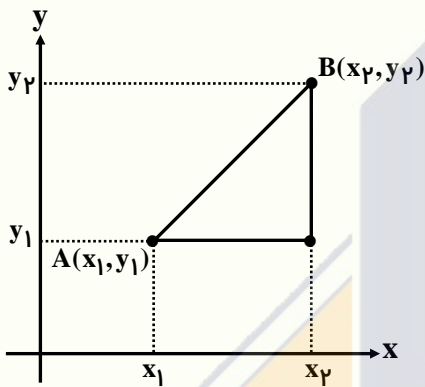
### فاصله دو نقطه:

**مثال:** در شکل مقابل با استفاده از قضیه فیثاغورس طول پاره خط  $AB$  را بدست آورید.



حال به شکل مقابل توجه کنید.

پس طول پاره خط  $AB$  که در آن مختصات  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  است برابر است با:



**تست:** نقاط  $A(7, 5)$  و  $C(3, 9)$  دو رأس مقابل یک مربع هستند. محیط این مربع چقدر است؟

- ۱۶ (۱)
- ۲۰ (۲)
- ۱۰ (۳)
- ۲۴ (۴)

**مثال:** نقاط  $A(-2, 1)$  و  $B(2, 4)$  و  $C(4, -7)$  مفروض اند.

**الف)** محیط مثلث  $ABC$  را بدست آورید.

**ب)** به دو روش نشان دهید مثلث  $ABC$  در رأس  $A$  قاعده است سپس مساحت آن را بدست آورید.

**تست:** نقاط  $A(-5, -2)$  و  $B(-3, 7)$  و  $C(3, 3)$  سه رأس مثلثی می‌باشند. این مثلث چگونه است؟

- (۱) متساوی الاضلاع
- (۲) فقط متساوی الساقین
- (۳) فقط قائم الزاویه
- (۴) متساوی الساقین و قائم الزاویه

**تست:** دایره‌ای از دو نقطه  $A(0, 2)$  و  $B(1, 0)$  گذشته و معادله یک قطر آن  $y - x = 1$  است. شعاع دایره کدام

است؟

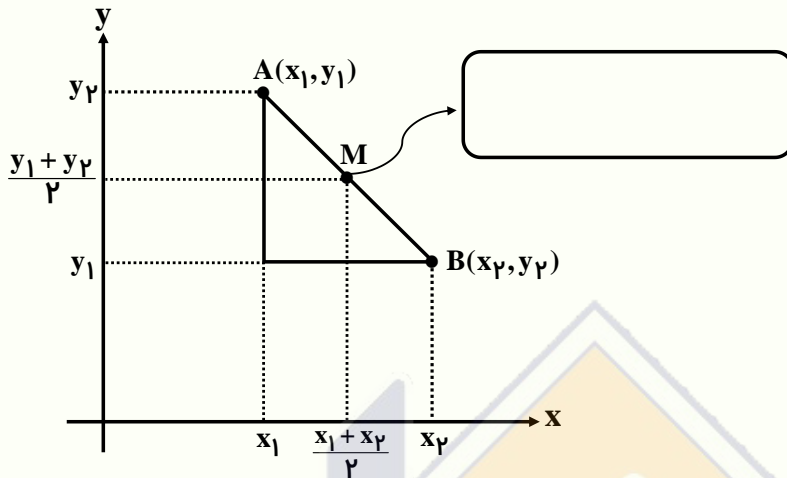
- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- (۲)  $\frac{\sqrt{10}}{2}$
- (۳)  $\frac{\sqrt{10}}{4}$
- (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**تست:** دو خط  $x + y = 5$  و  $y = 2x - 1$  قطرهای یک دایره‌اند. اگر این دایره از نقطه  $(5, -1)$  بگذرد، شعاع آن کدام

است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۵

## مختصات نقطه وسط پاره خط



پس مختصات وسط پاره خط  $AB$  که در آن  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  است برابر است با:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

**مثال:** مثلث با رئوس  $A(1, 9)$  و  $B(3, 1)$  و  $C(7, 11)$  را در نظر بگیرید. الف) مختصات نقطه  $M$  وسط ضلع  $BC$  را مشخص کنید. ب) طول میانه  $AM$  را محاسبه کنید. پ) معادله میانه  $AM$  را بدست آورید.

**مثال:** دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌های نقاط  $A(2, -2)$  و  $B(6, 4)$  هستند. الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید. ب) آیا نقطه  $C(7, 3)$  بر روی محیط دایره قرار دارد؟ چرا؟

**تست:** در مثلث ABC با سه رأس  $A(1,4)$ ،  $B(-2,-2)$  و  $C(4,2)$  میانه وارد بر ضلع BC محور x ها را با چه طولی قطع می کند؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

**تست:** نقاط  $A(2,0)$  و  $C(0,-1)$  دو رأس یک مربع و روی یک قطر هستند. کدام نقطه یک رأس مربع روی قطر دیگر است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۳ - اردیبهشت)

۱  $(0, \frac{3}{2})$

۲  $(\frac{3}{2}, -\frac{2}{2})$

۳  $(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$

۴  $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$

**نتیجه:** قرینه نقطه A نسبت به نقطه M برابر است با:

**تست:** قرینه نقطه  $A(3,-2)$  نسبت به نقطه وسط پاره خط BC با فرض  $B(5,1)$  و  $C(1,3)$  کدام است؟

۱  $(3,-6)$

۲  $(3,6)$

۳  $(2,3)$

۴  $(1,6)$

**تست:** قرینه نقطه  $A(2,-1)$  نسبت به نقطه  $O(-1,3)$  روی خط L به معادله  $ax+2y+2=0$  واقع است. طول از مبدأ L کدام است؟

۱  $-\frac{1}{2}$

۲  $\frac{1}{2}$

۳  $-2$

۴  $2$

**تست:** اضلاع مثلثی منطبق بر سه خط به معادلات  $y = 0$  و  $2y - x = 2$  و  $y + 2x = 16$  هستند، اندازه میانه نظیر

ضلع افقی این مثلث در صفحه مختصات کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

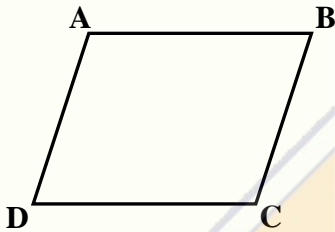
(۱)  $2\sqrt{5}$

(۲) ۵

(۳)  $3\sqrt{3}$

(۴) ۶

در هر متوازی‌الاضلاع همواره داریم:



**تست:** اگر  $A(0, -2)$ ،  $B(1, 3)$  و  $C(2, 1)$  سه رأس متوازی‌الاضلاع ABCD باشند، آنگاه خط AD محور x ها را با چه

طولی قطع می‌کند؟ ( $\hat{A} = \hat{C}$ )

(۱) ۲

(۲) -۱

(۳) ۴

(۴) -۴

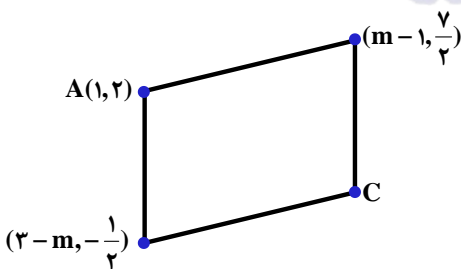
**تست:** در متوازی‌الاضلاع شکل روبه‌رو معادله قطر AC کدام است؟

(۱)  $y = 1$

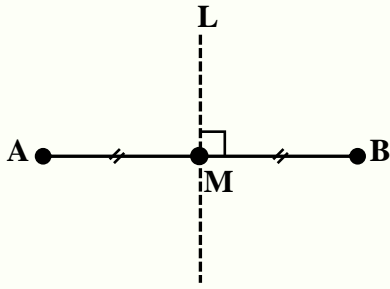
(۲)  $x = 1$

(۳)  $2x - y = 0$

(۴)  $3x + y = 5$



## روش نوشتن معادله عمود منصف یک پاره خط



**مثال:** معادله عمود منصف پاره خط  $AB$  را که در آن  $A(2, 4)$  و  $B(6, 2)$  باشد. را بنویسید؟

**تست:** اگر  $A(2, 0)$  و  $B(0, 4)$  دو رأس مقابل یک مربع باشند، معادله قطر دیگر مربع کدام است؟

$$(1) \quad 2y + x = 5$$

$$(2) \quad 2y - x = 3$$

$$(3) \quad 2x - y = 0$$

$$(4) \quad 2x + y = 4$$

**تست:** محل برخورد نیمساز ناحیه اول و سوم با عمود منصف پاره خط بین دو نقطه  $(-2, 3)$  و  $(2, 5)$  کدام

است؟

$$(1) \quad \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

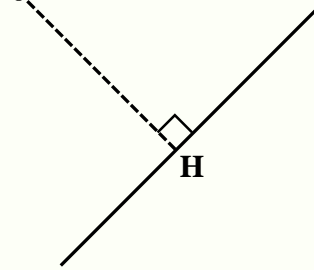
$$(2) \quad (2, 2)$$

$$(3) \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$(4) \quad \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$



## فاصله نقطه از خط:

 $A(x_0, y_0)$ 

فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  برابر است با:

**مثال:** فاصله نقطه  $A(-2, 4)$  از خط  $4x - 3y + 12 = 0$  را به کمک فرمول فاصله نقطه از خط به دست آورید. (تهایی حسابان ۱ خرداد ۱۴۰۳)

**مثال:** فاصله نقطه  $P(7, -4)$  را از هر یک از خطوط زیر بدست آورید؟

**الف)**  $2x + y = 5$

**ب)**  $x = 5$

**پ)**  $y = 0$

تحصیل با ما

**مثال:** خط  $4x - 3y = 0$  بر دایره‌ای به مرکز  $(3, -1)$  مماس است. مساحت دایره را محاسبه کنید. (تهایی ریاضی ۲ خرداد ۱۴۰۳)

**تست:** دو خط به معادلات  $L_1: x + 2y - 1 = 0$  و  $L_2: 2x + y - 1 = 0$  قطرهای دایره‌ای هستند که خط  $x - y + 2 = 0$  بر آن مماس است. محیط دایره کدام است؟

(۱)  $2\pi$

(۲)  $\sqrt{2}\pi$

(۳)  $2\sqrt{2}\pi$

(۴)  $\sqrt{\pi}$

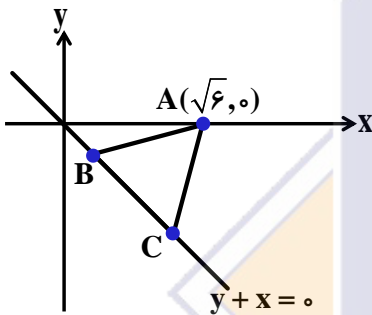
**تست:** در شکل مقابل مثلث  $ABC$  متساوی الاضلاع است. مساحت این مثلث چقدر است؟

(۱) ۳

(۲)  $\sqrt{3}$

(۳) ۹

(۴)  $2\sqrt{3}$



**مثال:** یکی از اضلاع مربعی بر خط  $L: y = 2x - 1$  واقع است. اگر  $A(3, 0)$  یکی از رئوس این مربع باشد. مساحت آن را بدست آورید؟

تحصیل باما

**تست:** کدام نقطه روی نیمساز ناحیه چهارم از دو خط  $2x - 3y + 1 = 0$  و  $-3x - 2y = 3$  به یک فاصله است؟

(۱)  $(1, -1)$

(۲)  $(2, -2)$

(۳)  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

(۴)  $(3, -3)$

**تست:** اگر نقاط  $A(2,5)$  و  $B(3,0)$  و  $C(1,-2)$  سه رأس مثلث  $ABC$  باشند طول ارتفاع  $AH$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{3}$

(۲)  $2\sqrt{3}$

(۳)  $3\sqrt{2}$

(۴)  $\sqrt{6}$

**تست:** نقطه  $A(3,-1)$  وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله  $2y - x = 5$  است. مساحت

این مربع کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

(۱) ۴۰

(۲) ۴۵

(۳) ۷۵

(۴) ۸۰

**تست:** نقطه  $(2, 5/4)$  رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط  $4x + y = 3$  و  $x - 4y = 5$

هستند. بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع کدام است؟ (انکوار ریاضی داخل ۱۱۴۰۲)

(۱)  $\frac{\sqrt{17}}{2}$

(۲)  $\frac{\sqrt{17}}{4}$

(۳)  $2\sqrt{17}$

(۴)  $\sqrt{17}$

**تست:** دو نقطه بر خطی به معادله  $y = x - 1$  قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله  $2x - 3y = 5$  برابر  $\sqrt{13}$

است. طول این دو نقطه کدام است؟ (تجربی ۸۹)

(۱) ۹ ، -۱۵

(۲) ۱۱ ، -۱۵

(۳) ۱۵ ، -۱۱

(۴) -۹ ، ۱۱

**تست:** دو رأس مجاور یک متوازی الاضلاع  $(1, -1)$  و  $(2, 1)$  است و یکی از اضلاع آن روی خط  $y - 2x = 1$  است. مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

(۱)  $4\sqrt{5}$

(۲)  $2\sqrt{5}$

(۳) ۴

(۴) ۲

**مساحت مثلث با سه رأس معلوم:**

روش گورولامپی 🤪

**مثال:** مساحت مثلثی با سه رأس  $A(0, 1)$ ،  $B(2, 5)$  و  $C(1, 2)$  را به دست آورید.

تحصیل باما

**تست:** مساحت مثلثی با سه رأس  $A(2, 5)$ ،  $B(3, 0)$  و  $C(0, 2)$  کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

(۱) ۶

(۲)  $6/5$

(۳) ۷

(۴)  $7/5$

**تست:** مثلثی با رأس‌های  $A(1,5)$  و  $B(7,3)$  و  $C(2,-2)$  مفروض است. اندازه ارتفاع  $AH$  در مثلث  $ABC$  کدام است؟ (تجربی ۹۹ - تجربی خارج ۱۴۰۱)

- (۱) ۴  
(۲)  $3\sqrt{2}$   
(۳) ۵  
(۴)  $4\sqrt{2}$

**تست:** سه ضلع یک مثلث به معادلات  $AB: y + 2x = 7$ ،  $AC: 4y - 3x = 17$  و  $BC: 2y - 7x = -19$  هستند، طول ارتفاع  $BH$ ، کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۱)

- (۱)  $4/4$   
(۲) ۳  
(۳)  $2/5$   
(۴) ۱

**تست:** مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$  و  $y = \frac{1}{2}x + 2$  کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۹)

- (۱) ۸  
(۲) ۹  
(۳) ۱۰  
(۴) ۱۲

تحصیل باما

## تعیین علامت گورولامپی (یادآوری دهم)

- ۱) ابتدا تمام ریشه‌های صورت و مخرج را به دست آورید و از کوچک به بزرگ در جدول بنویسید.
- ۲) سمت راست و چپ ریشه مضاعف (ریشه پیرانتهایی که توان زوج دارند) یا ریشه درون عبارت قدر مطلق علامت‌ها عوض نمی‌شود.
- ۳) وقتی رادیکال فرجه فرد داشتیم فقط به عبارت زیر رادیکال توجه می‌کنیم. همچنین طبق همین الگو به توان فرد نیز اهمیت نمی‌دهیم.
- ۴) وقتی رادیکال فرجه زوج داشتیم می‌توانیم کلاً بیخیالش شویم.
- ۵) کلاً عبارتهایی که تکلیف علامتشان مشخص است قابل چشم‌پوشی هستند. مانند درجه دوهای فاقد ریشه یا عباراتی مانند  $|x| + 1$

**مثال:** عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

$$P = \frac{1 - x^3}{x^2 - 4x + 4}$$

$$P = \frac{x(x-3)^2}{x^2 + x - 2}$$

تحصیل باما

$$P = (x^2 - 9)(3x - 1)$$

$$P = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$$

$$P = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$$

$$P = \frac{|x+5|(x+1)^2 \sqrt[3]{x+3}}{(x^2-5x+4)^3 \sqrt{(x-3)^2}}$$

$$P = (x+1)(x-1)^2(x-4)^3$$

تحصیل باما

$$P = \frac{(|x|+1)(x^2-2x)}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$$

$$P = \frac{(x-1)^2(x^2 - 2x - 3)}{(x+2)^3 |x-2|}$$

$$P = \frac{x^5 |x+1|}{(x-1)^3 (x+2)^2}$$

$$P = \frac{(x^2 - 5x - 6)(x^2 + 1)}{(x-1)^2 (2x - 4)}$$

**تست:** با توجه به جدول زیر که مربوط به تعیین علامت عبارت  $P = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$  است. حاصل  $\frac{ab}{cd}$  کدام است؟

|   |   |    |    |
|---|---|----|----|
| x | 1 | 2  | 3  |
| P | + | -  | +  |
|   |   | تن | تن |

- (۱)  $\frac{1}{5}$
- (۲)  $-\frac{1}{5}$
- (۳)  $-\frac{1}{4}$
- (۴)  $-\frac{1}{4}$



**تست :** در کدام بازه از مقادیر مثبت  $x$  حاصل  $A = \frac{(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 4)}{(x^2 + 7x + 6)^3 x}$  مثبت است؟

- (۱)  $(0, 2)$
- (۲)  $(2, 3)$
- (۳)  $(3, +\infty)$
- (۴)  $(2, +\infty)$

**تست :** اگر  $P(x) = x^2 + bx + c$  فقط در فاصله  $(-2, 3)$  منفی باشد، مقدار  $b - c$  کدام است؟

- (۱) ۵
- (۲) -۵
- (۳) -۱
- (۴) ۱

**تست :** اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های تابع درجه دوم  $f(x) = 3x^2 - mx - 1$  باشد، به ازای چند مقدار صحیح  $m$  رابطه  $2 < x_2 < 1 < x_1$  برقرار است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

## نامعادله (بخشی از جدول تعیین علامت)

اگر  $A$  و  $B$  دو عبارت جبری باشند، آن گاه هر یک از نامساوی‌های به فرم  $A > B$  و  $A \geq B, A \leq B, A < B$  را یک

نامعادله می‌نامیم، مانند:  $x^2 + x < 1, 3x + 1 \geq 2x - 7$

## ویژگی‌های نامساوی‌ها که در حل نامعادلات استفاده می‌شوند:

۱- می‌توانیم دو طرف نامساوی را در هر عدد مثبتی ضرب یا بر هر عدد مثبت تقسیم کنیم یا به توان فرد برسازیم و ریشه فرد بگیریم.

۲- اگر دو طرف نامساوی را در عددی منفی ضرب یا بر عدد منفی تقسیم کنیم جهت عوض می‌شود.

۳- برای رساندن به توان زوج، معکوس کردن یا استفاده از قدر مطلق باید علامت‌ها را بدانیم.

**مثال:** نامعادله  $5x - 1 \geq 3x - 7$  را حل کنید.

**مثال:** نامعادله  $\frac{x^2 - 9}{2x + 1} \geq 0$  را حل کنید.

**تست:** اگر مجموعه جواب نامعادله  $\frac{5x^2 - 12x}{x^2 - 9} < 1$  به صورت  $\{-a, a\} - \{b\}$  باشد،  $a + b$  کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴/۵

(۳) ۱/۵

(۴) ۴

**تست :** مجموعه جواب نامعادله  $\frac{(x^2 + 4)(|x| + 3)}{(x^2 - 9)(x^2 - x + 1)} < 0$  کدام است؟

(۱)  $(3, +\infty)$

(۲)  $(-3, 3)$

(۳)  $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

(۴)  $(-\infty, -3)$

**تست :** مجموعه جواب نامعادله  $\frac{x^6 (x + 2)^5 |x - 3|}{(x^2 - 6x + 5)(x - 1)} \leq 0$  شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) بیشمار

**تست :** نمودار تابع  $y = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}$ ، به ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی  $y = 0$  و  $y = -2$  واقع می شود؟ (انکوار ریاضی دیماه ۱۴۰۱)

(۱) ۱

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) صفر

تحصیل باما

## قدر مطلق:

برای هر عدد حقیقی  $a$ ، فاصله نقطه نمایش عدد حقیقی  $a$  بر روی محور اعداد حقیقی از مبدأ را قدر مطلق  $a$  نامیده و به صورت  $|a|$  نشان می‌دهیم، برای مثال:

$$|5| = 5, |0| = 0, |-3| = 3$$

## معادلات قدر مطلق:

$$|u| = a \Rightarrow$$

**تست:** جواب معادله  $|2x - 1| - 7 = 0$  کدام است؟

(۱)  $\{3, 4\}$

(۲)  $\{-3, 4\}$

(۳)  $\{-3, -4\}$

(۴)  $\{-4, +3\}$

$$|u| = |v| \Rightarrow$$

**تست:** مجموع جواب‌های معادله  $|2x + 1| - |x - 1| = 0$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{2}{3}$

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۳)  $-\frac{3}{2}$

(۴)  $-2$

تحصیل باما

## نامعادلات قدر مطلق:

برای حل نامعادله‌های شامل قدر مطلق از روش‌های مختلفی استفاده می‌کنیم. تمام این روش‌ها بر پایه ویژگی‌های قدر مطلق است که به آن‌ها اشاره کردیم.

در نامعادله‌هایی که به شکل  $|A| > B$  یا  $|A| < B$  هستند می‌توانیم از ویژگی‌های روبه‌رو استفاده کنیم:

$$|A| > B \xrightarrow{B > 0} A > B \text{ یا } A < -B$$

$$|A| < B \xrightarrow{B > 0} -B < A < B$$

**تذکر:** برای حل نامعادله‌های به شکل  $|A| \leq B$  می‌توانیم طرفین را به توان ۲ برسانیم.

**مثال:** چند عدد صحیح در نامساوی  $|5x - 3| < 12$  صدق می‌کنند؟

**تست:** جواب نامعادله  $|1 - 2x| > 3$  شامل چند عدد صحیح نیست؟

۲ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

**تست:** در بازه  $(a, b)$  عبارت  $15x^2 + 73x + 14$  منفی و عبارت  $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right|$  بزرگ‌تر از سه است. بیشترین مقدار

$b - a$  کدام است؟ (کنکور تجربی ده‌ماهه ۱۴۰۱)

 $\frac{5}{3}$  (۱)

 $\frac{23}{3}$  (۲)

 $\frac{4}{15}$  (۳)

 $\frac{67}{15}$  (۴)