



فصل اول

مجموعه

الگ

دنباله

تحصيل پاما



پایه دهم

## مجموعه (یادآوری)

بعنوان دسته ای از اشیاء دو بدو متمایز در نظر گرفته می شود که با نام بردن اعضای آن یا بیان خاصیت مشترک اعضای آن مشخص می شود. بعبارتی دیگر مجموعه دسته ای از اشیاء متمایز و خوش تعریف است. (یعنی بدون تردید و به یقین بتوان گفت که شیء معینی در مجموعه هست یا نه)

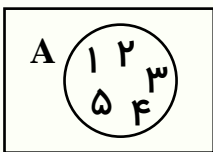
**مثلاً:** دانش آموزان شرکت کننده در کنکور ۹۸ ساکن تهران مجموعه است.

دانش آموزان با استعداد تهران مجموعه نیست. چون با استعداد خودش تعریف نیست.

★ اعداد طبیعی کمتر از ۶ را به این صورت نشان می دهیم:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

★ یا با نمادهای ریاضی به صورت مقابل:  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$

★ یا با نمایش هندسی به صورت مقابل (نمودار ون)



ترتیب اعضا در مجموعه اهمیتی ندارد. یعنی جابه جایی عضوهای مجموعه را تغییر نمی دهد.

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{2, 1, 3\}$$

$$\{2, 2, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7\} = \{2, 5, 7\}$$

عضوهای تکراری در مجموعه شمرده نمی شوند.

## مفهوم تعلق یا عضویت:

اگر  $x$  در مجموعه  $A$  باشد می نویسیم  $x \in A$  و اگر  $x$  در مجموعه  $A$  نباشد می نویسیم  $x \notin A$ .

**مثال:** اگر  $A = \{3, 5, 7\}$  آنگاه  $3 \in A$  و  $9 \notin A$

## مفهوم زیر مجموعه:

مجموعه  $A$  را زیر مجموعه  $B$  گویند هر گاه همه اعضای  $A$  عضو  $B$  باشند و می نویسیم:  $A \subseteq B$

**مثال:** اگر  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  آنگاه  $A = \{3, 5\}$  زیرمجموعه  $B$  می باشد و  $C = \{7, 4\}$  زیرمجموعه  $B$  نمی باشد

## ویژگی های زیر مجموعه:

هر مجموعه زیر مجموعه خودش است. $A \subseteq A$	①
اگر دو مجموعه زیر مجموعه هم باشند آنگاه با هم مساویند. $\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases} \leftrightarrow A = B$	②
تهی زیر مجموعه هر مجموعه ای است. $\emptyset \subseteq A$ <b>تذکر:</b> مجموعه تهی مجموعه ای است که هیچ عضوی ندارد و آن را با $\emptyset$ یا $\{ \}$ نمایش می دهیم.	③
هر مجموعه ای زیر مجموعه مرجع می باشد. $A \subseteq U$ <b>تذکر:</b> وقتی زیر مجموعه های یک مجموعه را مورد بررسی قرار می دهیم به آن مجموعه مرجع می گویند و آن را با $U$ نشان می دهند.	④

## برای حل سؤالات مجموعه‌ها فقط این قوانین را بلد باشید. تمام.

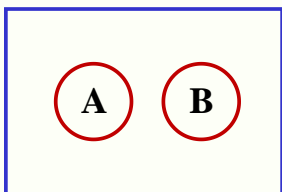
$A - B =$  همه آن‌هایی که در  $A$  باشند و در  $B$  نباشند

$$A - B = A \cap B'$$

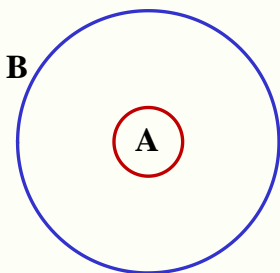
$$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\begin{cases} A \cup A \cap B = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$$



$$\longrightarrow A - B = A, B - A = B$$

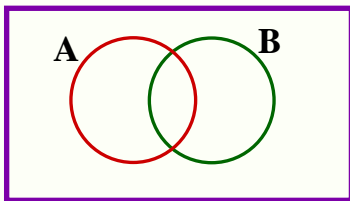


$$\longrightarrow A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \\ A - B = \emptyset \end{cases}$$

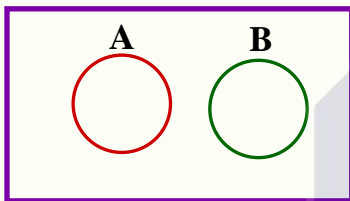
تحصیل باما

## روش‌های زیبا برای حل تست‌های جبر مجموعه‌ها:

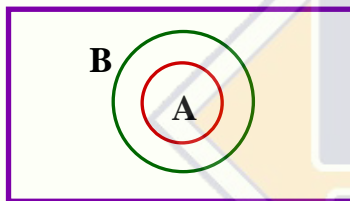
هرگاه در صورت سوال بحث روی ۲ مجموعه بود شکل را اینگونه رسم کنید.



مگر اینکه مسأله شرطی داشته باشد که در این صورت متناسب با شرط مسأله شکل می‌کشیم مثلاً:

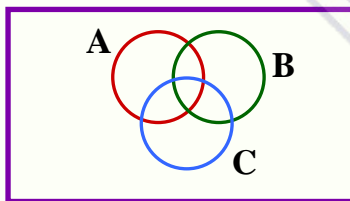


★ اگر بگویند A و B جدا از هم اند  $(A \cap B = \emptyset)$  ←



★ اگر بگویند  $A \subseteq B$  ←

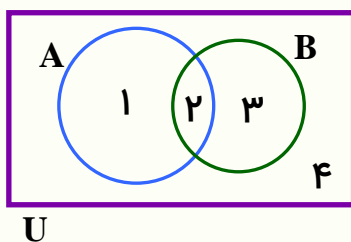
و هرگاه در صورت سوال بحث روی ۳ مجموعه بود شکل را اینگونه رسم کنید.



و باز هم اگر شرط خاصی روی صورت سوال بود متناسب با شرط شکل می‌کشیم.

**تذکر:** در کل اگر در این تیپ سوالات چه برای ۲ مجموعه چه برای ۳ مجموعه طراح اشاره به شرط خاصی نداشت حتماً مجموعه‌ها اشتراک دارند.

**توجه شود:**



$$A = \{1, 2\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$A - B = \{1\}$$

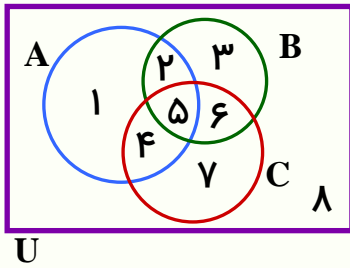
$$A' = \{3, 4\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}$$

$$B - A = \{3\}$$

$$B' = \{1, 4\}$$



$$A = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$A \cap B = \{2, 5\}$$

$$A - B = \{1, 4\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 6\}$$

$$A \cap C = \{4, 5\}$$

$$A - C = \{1, 2\}$$

$$C = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$B \cap C = \{5, 6\}$$

$$B - C = \{2, 3\}$$

$$A \cap B \cap C = \{5\}$$

**تست:** اگر مجموعه مرجع مجموعه اعداد صحیح باشد و  $A' = \{1, 2, 3\}$  و  $B' = \{2, 3, 4, 5\}$  آنگاه  $(A \cup B)'$

کدام مجموعه است؟ (کنکور سراسری)

(۱)  $\{2, 3\}$

(۲)  $\{2, 4, 5\}$

(۳)  $\{3, 4, 5\}$

(۴)  $\{4, 5\}$

**تست:** اگر  $A$  و  $B$  دو ناتهی باشند، حاصل  $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$  برابر کدام است؟

(۱)  $A$

(۲)  $B$

(۳)  $A \cup B$

(۴)  $A \cap B$

**تست:** اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی غیر تهی باشند،  $(A \cap B') - (B - A)$  برابر کدام مجموعه است؟ (ریاضی خارج کشور)

(۱)  $B'$

(۲)  $\emptyset$

(۳)  $A \cap B$

(۴)  $A - B$

**تست:** اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع  $U$  باشند، مجموعه  $(B \cap A) \cap [(B \cup A) \cap B]$  با  $A' \cup (B - A)$  کدام مجموعه برابر است؟ (داخل ۱۴۰۱)

(۱)  $(A - B)'$

(۲)  $B - A$

(۳)  $B$

(۴)  $\emptyset$

**تست:** اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند متمم  $(B' - A) \cup (A' - B)$  کدام است؟ (مدارس پرتق تهران)

(۱)  $A \cap B$

(۲)  $A \cup B$

(۳)  $A' \cap B'$

(۴)  $A' \cup B'$

**تست:** اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیر تهی باشند مجموعه  $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$  کدام است؟ (آزمون جامع گاج)

(۱)  $A' - B'$

(۲)  $\emptyset$

(۳)  $A'$

(۴)  $(A - B)'$

تحصیل باما

**تست:** مجموعه  $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$  برابر کدام است؟ (آزمون جامع گاج)

(۱)  $B - A$

(۲)  $B$

(۳)  $\emptyset$

(۴)  $A'$

**تست:** مجموعه  $(A - B) \cup [(A \cap B') \cap ((B - A) \cup A')]$  همواره برابر کدام است؟ (آزمون جامع کاتون)

A (۱)

A - B (۲)

A ∪ B (۳)

U (۴)

**تست:** اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه  $(A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (A' \cup B'))$  برابر کدام

است؟ (داخل ۹۷)

A ∩ B (۱)

A ∪ B (۲)

B (۳)

A (۴)

**تست:** اگر A و B دو مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه

$$[(A \cap B) - B]' \cap [(A \cap B) \cup (A - B)]$$
 با کدام مجموعه برابر است؟ (خارج ۱۴۰۱)

A (۱)

∅ (۲)

A - B (۳)

A' - B' (۴)

تحصیل باما

**تست:** اگر  $((A - B) \cup (B - A))' = A' \cap B'$  باشد، مجموعه  $B' - A'$  با کدام مجموعه برابر است؟

A (۱)

A' (۲)

∅ (۳)

B' (۴)

**تست:** اگر  $U$  مجموعه مرجع و  $A' \cup B = A' \cap B'$  باشد، کدام مورد درست است؟ (خارج ۱۴۰۱)

$A = B$  (۱)

$A = \emptyset$  (۲)

$B = U$  (۳)

$B = \emptyset$  (۴)

**تست:** اگر  $A' \subset B$  باشد حاصل  $[(B' - A) - (A - B)] \cup B'$  کدام است؟ (آزمون جامع کانون)

$A$  (۱)

$B'$  (۲)

$A'$  (۳)

$B$  (۴)

**تست:** حاصل  $(B - C) \cap [(A \cup B) \cap (C - A)']$  کدام است؟ (آزمون جامع گزینه دو)

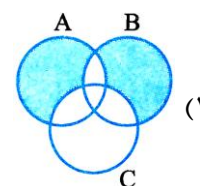
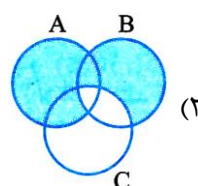
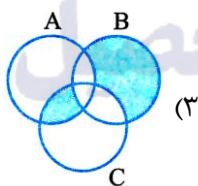
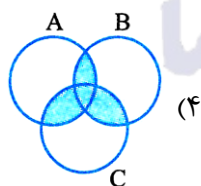
$B$  (۱)

$B - C$  (۲)

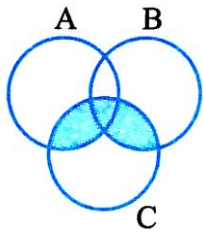
$C$  (۳)

$C - B$  (۴)

**تست:** نمایش هندسی مجموعه  $(A - B) \cup (B - C)$  کدام است؟







**تست:** قسمت رنگی شکل مقابل، نمودار ون کدام مجموعه است؟

(۱)  $A - (B \cap C)$

(۲)  $(A \cap B) \cup C$

(۳)  $A \cup (B \cap C)$

(۴)  $(A \cup B) \cap C$

### تعمیم اجتماع و اشتراک:

محاسبه اجتماع و اشتراک چند مجموعه

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \text{اجتماع بازه ها از بازه ی اول تا بازه ی } n \text{ ام}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \text{اشتراک بازه ها از بازه ی اول تا بازه ی } n \text{ ام}$$

**تست:** اگر  $A_n = [n-1, n+1]$ ، آنگاه مجموعه  $\bigcup_{n=1}^4 A_n - \bigcap_{n=1}^3 A_n$  با کدام مجموعه برابر است؟

(۱)  $\{x : 1 \leq x \leq 5\}$

(۲)  $\{x : 0 \leq x \leq 5\}$

(۳)  $\{x : 0 \leq x \leq 5, x \neq 2\}$

(۴)  $\{x : 1 \leq x \leq 5, x \neq 2\}$

**تست:** اگر  $n$  عدد طبیعی و  $A_n = [(-1)^n n, 2n]$  باشد، چند عدد صحیح به  $\bigcup_{n=1}^4 A_n$  تعلق دارد؟

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۱

تحصیل باما

**تست:** اگر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $A_n = (n, n^2)$  و  $B_n = [(-1)^n, 2n^2]$  باشند،  $A_2 \cap B_4$  کدام است؟ (آزمون سنجش)

(۱)  $(-1, 48)$

(۲)  $[2, 4]$

(۳)  $(2, 4)$

(۴)  $[1, 48]$

## مجموعه‌های اعداد:

در سال‌های قبل با این مجموعه‌ها آشنا شده‌اید.

در سال‌های گذشته با مجموعه اعداد مهمی مانند اعداد طبیعی و... آشنا شدید که به طور خلاصه به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

مجموعه اعداد طبیعی:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی:  $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

مجموعه اعداد گنگ:  $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

مجموعه اعداد حقیقی:  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

**تذکر:** مجموعه اعداد طبیعی، زیرمجموعه‌ی اعداد حسابی اند و مجموعه اعداد حسابی، خود زیرمجموعه‌ی اعداد صحیح اند

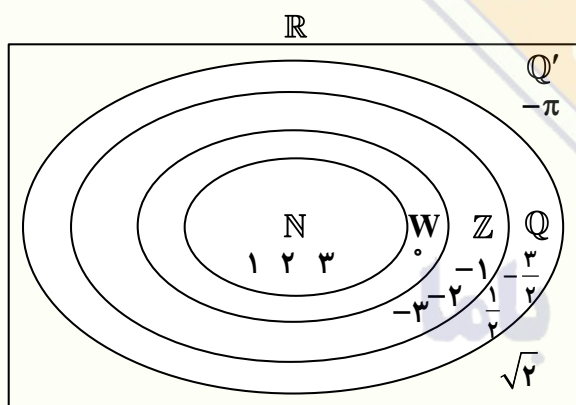
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

و مجموعه اعداد صحیح زیرمجموعه‌ی اعداد گویا هستند

**تذکر:** مجموعه اعداد گویا و گنگ هیچ اشتراکی با هم ندارند ولی هر دو زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی هستند.

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$$

**تذکر:** در نمودار مقابل، همه‌ی مجموعه‌های فوق نشان داده‌شده و رابطه‌ی آن‌ها با یکدیگر مشخص شده است:



**مثال:** طرف دوم هریک از تساوی‌های زیر را بنویسید.

آ)  $\mathbb{R} - \mathbb{Q} =$

ب)  $\mathbb{Z} - \mathbb{W} =$

پ)  $\mathbb{Q}' \cap \mathbb{Q} =$

ت)  $\mathbb{W} - \mathbb{Q}' =$

ث)  $\mathbb{W} - \mathbb{N} =$

ج)  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' =$

**تست:** عدد  $2/1$  - عضو چندتا از مجموعه‌های  $Q - N, Q - Q', Q - Z$  و  $R - Z$  است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) هیچ

**تست:** کدام یک از تساوی‌های زیر درست است؟

- (۱)  $N \cap Q = Q$   
(۲)  $Q \cap Q' = Z$   
(۳)  $R - Z = Q$   
(۴)  $W \cap N = N$

**تست:** اگر  $R$  مجموعه مرجع باشد، مجموعه  $Q - (Z - W)'$  برابر کدام است؟

- (۱) مجموعه اعداد طبیعی  
(۲) مجموعه قرینه اعداد طبیعی  
(۳) مجموعه اعداد حسابی  
(۴) مجموعه قرینه اعداد حسابی

## بازه‌ها:

دسته‌ای دیگر از زیرمجموعه‌های پرکاربرد مجموعه‌ی اعداد حقیقی، بازه‌ها هستند. فرض کنید  $a$  و  $b$  اعدادی حقیقی باشند  $a < b$ . در این صورت داریم:

بازه‌های باز  $(a, b)$ :

زیرمجموعه‌ی  $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  از اعداد حقیقی را بازه‌ی باز از  $a$  تا  $b$  می‌نامند و با  $(a, b)$  نشان می‌دهند:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

بازه‌ی باز  $(a, b)$  را مانند شکل زیر روی محور اعداد حقیقی نشان می‌دهند:



توجه کنید که دایره‌های توخالی نشان می‌دهند که اعداد  $a$  و  $b$  عضو  $(a, b)$  نیستند، هرچند که هر عدد حقیقی بین  $a$  و  $b$  عضو  $(a, b)$  است.

بازه‌ی بسته  $[a, b]$ :

زیرمجموعه‌ی  $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  از اعداد حقیقی را بازه‌ی بسته‌ی از  $a$  تا  $b$  می‌نامند و با  $[a, b]$  نشان می‌دهند:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

بازه‌ی بسته‌ی  $[a, b]$  را به شکل زیر روی محور اعداد حقیقی نشان می‌دهند:



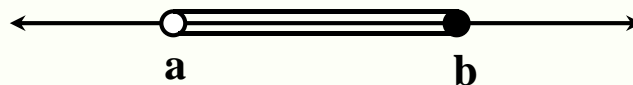
توجه کنید که دایره‌های توپر نشان می‌دهند که اعداد  $a$  و  $b$  و نیز همه‌ی اعداد حقیقی بین  $a$  و  $b$ ، عضو  $[a, b]$  هستند.

بازه‌ی نیم‌باز  $(a, b]$ :

زیرمجموعه‌ی  $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  از اعداد حقیقی را بازه‌ی نیم‌باز می‌نامند و با  $(a, b]$  نشان می‌دهند:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

بازه‌ی نیم‌باز  $(a, b]$  را به شکل زیر روی محور اعداد حقیقی نشان می‌دهند:



توجه کنید که دایره‌ی توخالی در  $a$ ، نشان می‌دهد که  $a$  عضو  $(a, b]$  نیست و دایره‌ی توپر در  $b$  نشان می‌دهد که  $b$  عضو  $(a, b]$  هست. البته هر عدد حقیقی بین  $a$  و  $b$  عضو  $(a, b]$  است.

### بازه نیم باز $[a, b)$ :

زیر مجموعه‌ی  $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  از اعداد حقیقی را بازه‌ی نیم باز می‌نامند و با  $[a, b)$  نشان می‌دهد:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

بازه‌ی نیم باز  $[a, b)$  را به شکل زیر روی محور اعداد حقیقی نشان می‌دهند:



توجه کنید که دایره‌ی توپر در  $a$  نشان می‌دهد که  $a$  عضو  $[a, b)$  است و دایره‌ی توخالی در  $b$  نشان می‌دهد که  $b$  عضو  $[a, b)$  نیست. البته هر عدد حقیقی بین  $a$  و  $b$  عضو  $[a, b)$  است.

**توجه:** بازه‌ها انواع دیگری هم دارند که خیلی پرکاربردند. دیدیم که مثلاً بازه‌ی  $(1, 2)$  مجموعه‌ی همه‌ی عددهای حقیقی است که از ۱ بیش‌تر و از ۲ کم‌ترند. اگر بخواهیم مجموعه‌ی همه‌ی عددهای حقیقی را که از ۱ بیش‌ترند با نمادگذاری بازه‌ها نشان دهیم، از  $(1, +\infty)$  استفاده می‌کنیم که در آن  $+\infty$  (بخوانید مثبت بی‌نهایت) عددی حقیقی نیست و صرفاً نشان می‌دهد که هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، عضو این مجموعه است. همین‌طور، اگر بخواهیم مجموعه‌ی همه‌ی عددهای حقیقی را که از ۱ کم‌ترند با نمادگذاری بازه‌ها نشان دهیم، از  $(-\infty, 1)$  استفاده می‌کنیم که در آن  $-\infty$  (بخوانید منفی بی‌نهایت) عددی حقیقی نیست و صرفاً نشان می‌دهد که هر عدد حقیقی کوچک‌تر از ۱، عضو این مجموعه است. این نوع بازه‌ها نمایش هندسی آن‌ها را در زیر آورده‌ایم. در هر یک از آنها، دایره‌ی توخالی نشان می‌دهد که  $a$  عضو بازه نیست و دایره‌ی توپر نشان می‌دهد که  $a$  عضو بازه هست.

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

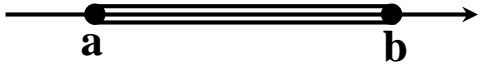

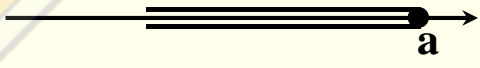
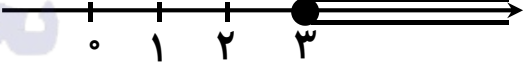
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

**فعالیت:** اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که  $a < b$  آنگاه جدول زیر را کامل کنید. (کتاب درسی)

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته			
نیم باز	$[a, b)$		
نیم باز	$(a, b]$		
		$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$	
			
		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم باز	$[a, +\infty)$		
			
	$(-\infty, a)$		
		$\mathbb{R}$	
			
		$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$	

**مثال:** مجموعه‌ی  $(3, 10) \cup [1, 4]$  را به شکل بازه بنویسید؟

**مثال:** مجموعه‌ی  $(-1, +\infty) \cap [2, 4)$  را به شکل بازه بنویسید؟

**مثال:** اگر  $A = (-\infty, 3]$  و  $B = (-1, +\infty)$ ، مجموعه‌های  $A - B$  و  $B - A$  را به شکل بازه بنویسید؟

**تمرین:** حاصل عبارات زیر را به صورت بازه نشان دهید.

**(الف)**  $(-2, +\infty) \cap (-3, 1)$

**(ب)**  $(1, 4] - [2, +\infty)$

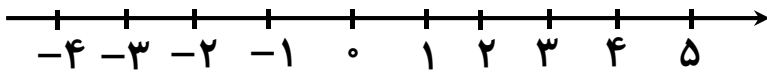
**(ج)**  $(-\infty, -1] - (0, 6)$

**(د)**  $(0, 4] - \{1\}$

**(هـ)**  $\mathbb{R} - [1, 4)$

تحصیل باما

**مثال:** نمایش هندسی دو بازه  $A = (-4, 2]$  و  $B = (-1, 3]$  را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.



$A \cup B$  (ب)

$A \cap B$  (الف)

$B - A$  (د)

$A - B$  (ج)

**مثال:** در جدول زیر متمم چند مجموعه را با توجه به مجموعه‌ی مرجع بیان شده به دست آورید؟

مجموعه‌ی مرجع	مجموعه‌ی A	مجموعه‌ی A'
$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	$\{-3, -2, -1\}$	
N	مجموعه‌ی اعداد زوج	
W	$\{0\}$	
R	$[4, +\infty)$	
R	$[3, 4)$	
R	$(-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$	

**توجه:** در مورد بازه‌های پارامتری حواستان باشد که همیشه عدد سمت راست از عدد سمت چپ بیشتر است.

$(a - 2, 3a) \Rightarrow$



**تست:** طول بازه  $A = [a - b, b - a]$  چند برابر طول بازه  $B = (a + k, b + k)$  است؟  $(b > a)$

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳)  $k$   
(۴)  $2k$

**تست:** اگر  $A = [-2, 1]$  و  $B = (-1, 1]$  و  $C = [0, 4)$  باشند، مجموعه  $A - (B \cap C)$  کدام است؟

- (۱)  $[-2, -1]$   
(۲)  $[-2, -1)$   
(۳)  $[-2, 0]$   
(۴)  $[-2, 0)$

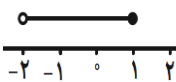
**تمرین:** اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$  و  $B = (2, 7)$  و  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  باشد، حاصل  $(A \cap B) \cup C$  را به صورت بازه نوشته و روی محور نشان دهید؟

**تمرین:** اگر  $A = [-2, 3]$  و  $B = (1, 4]$  باشد، بازه‌های  $A$  و  $B$  را روی محور نشان دهید و حاصل عبارات  $A - B$  و  $B - A$  و  $A \cup B$  و  $A \cap B$  را مشخص کنید؟

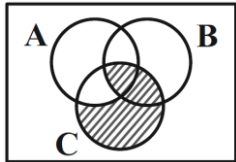
**تست:** در بازه  $[-2, 3]$  چند عدد صحیح و چند عدد حسابی و چند عدد طبیعی وجود دارد؟

- (۱) ۲, ۲, ۵
- (۲) ۲, ۳, ۳
- (۳) ۲, ۳, ۵
- (۴) ۱, ۳, ۲

**تست:** اگر  $A = [-1, 2]$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq 3 - 2x < 5\}$  و نمایش هندسی مجموعه  $C$  به صورت  $x$  در محور زیر باشد،



باشد، با توجه به نمودار ون روبه‌رو، قسمت هاشور خورده، چه مجموعه‌ای را نشان می‌دهد؟ (آزمون کانون)



- (۱)  $(-2, 1) - \{-1\}$
- (۲)  $(-2, 1)$
- (۳)  $(-2, -1)$
- (۴)  $(-2, -1]$

**تست:** مجموعه  $(-2, 5] \cup (-3, 0)$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۷
- (۲) ۸
- (۳) ۹
- (۴) ۱۰

**تست:** اگر  $\{a\} = [4k - 3, +\infty) \cap (-\infty, 2k - 1]$  باشد، کدام است  $ak$ ؟

- (۱) ۱
- (۲) -۱
- (۳)  $\frac{1}{2}$
- (۴)  $-\frac{1}{2}$

**تست:** اشتراک بازه‌های  $(a, -2]$  و  $(b, 4]$  برابر  $(1, \frac{2}{3})$  است. اجتماع بازه‌های  $(b, -2a - 1)$  و  $(a, b)$  کدام است؟

(۱)  $(-3, 1)$

(۲)  $(-1, \frac{2}{3})$

(۳)  $(1, 4)$

(۴)  $(-3, 1) - \{-\frac{2}{3}\}$

**تست:** اگر  $(b, 7) = (3, 7) \cup (2b - 2, 2b + 1)$  باشد،  $b^2$  کدام است؟ (آزمون سنجش)

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۸

(۴) ۱

**تست:** مجموعه  $\mathbb{R} - \{a\}$  را می‌توان به صورت اجتماع بازه‌های  $(-\infty, 2b - 1)$  و  $(-b + 5, +\infty)$  نمایش داد.

مقدار  $a + b$  کدام است؟ (آزمون سنجش)

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) ۵

تحصیل باما

## مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

**مجموعه‌های متناهی:** مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی است، مانند بچه‌های یک کلاس یا دانه‌های شن روی کره‌ی زمین یا درختهای جنگل آمازون که اگرچه مجموعه‌های بسیار بزرگی هستند ولی قابل شمارش‌اند.

**مجموعه‌های نامتناهی:** مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها از هر عددی بزرگتر است، مانند مجموعه اعداد صحیح بیش از ۱۰۰، یا مجموعه اعداد طبیعی در واقع هر مجموعه‌ای را که متناهی نباشد، می‌توان نامتناهی در نظر گرفت.

**نکته:** جدول بررسی اجتماع اشتراک و تفاضل مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

انواع مجموعه‌ها	اجتماع	اشتراک	تفاضل
دو مجموعه‌ی متناهی	متناهی	متناهی	متناهی
یک مجموعه‌ی متناهی و دیگری نامتناهی	نامتناهی	متناهی	نامتناهی = متناهی - نامتناهی
دو مجموعه‌ی نامتناهی	نامتناهی	نامعلوم	نامعلوم

**تست:** کدام یک از مجموعه‌های زیر مجموعه‌ای متناهی است؟

- مجموعه همه اعداد گویا بین ۱ و ۲
- مجموعه همه اعداد حسابی بزرگ‌تر از ۱۰۰۰
- مجموعه همه اعداد صحیح کوچک‌تر از ۱۰۰
- مجموعه همه اعداد حسابی کوچک‌تر از ۱۰۰۰۰

تحصیل با ما

**مثال:** درستی یا نادرستی عبارت را مشخص کنید. (تهایی خرداد ۱۳۰۳)

اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه  $A$  نیز متناهی خواهد بود.

**مثال:** فرض کنید  $U$  مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد. (تقریب کتاب درسی)  
**الف)**  $U$  را با نمایش اعضای آن بنویسید.

**ب)**  $U$  متناهی است یا نامتناهی؟

**ج)** یک زیرمجموعه‌ی متناهی از  $U$  بنویسید.

**د)** دو زیرمجموعه‌ی متناهی مانند  $C$  و  $D$  از  $U$  بنویسید؛ به طوری که  $C \subseteq D$

**تست:** چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست است؟

**الف)** تفاضل دو مجموعه نامتناهی همواره متناهی است.

**ب)** هر مجموعه نامتناهی، بیشمار زیرمجموعه نامتناهی دارد.

**ج)** اگر  $A \subseteq B$  و  $A$  نامتناهی باشد، آنگاه الزاماً  $B$  هم نامتناهی است.

**د)** اگر  $A \cup B$  نامتناهی باشد، آنگاه  $A$  و  $B$  نامتناهی اند.

**ه)** اگر  $A \cap B$  متناهی باشد، آنگاه  $A$  و  $B$  متناهی اند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

**تست:** کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

(۱) مجموعه مستطیل‌هایی که مساحت آن‌ها برابر ۳۵ است.

(۲) مجموعه اعداد طبیعی ۴ رقمی که مجموع ارقام آن‌ها بیشتر از ۵ است.

(۳) مجموعه اعداد طبیعی که مجموع ارقام آن‌ها برابر ۲ است.

(۴) مجموعه مثلث‌هایی که محیط آن‌ها برابر ۴۵ است.

**تست:** اگر  $A' \subset B'$  باشد آنگاه کدام یک از گزینه‌های زیر همواره درست است؟

(۱) اگر  $B$  متناهی باشد آنگاه  $A$  نامتناهی است.

(۲) اگر  $B$  متناهی باشد آنگاه  $A$  متناهی است.

(۳) اگر  $A$  نامتناهی باشد آنگاه  $B$  متناهی است.

(۴) اگر  $A$  متناهی باشد آنگاه  $B$  متناهی است.

**تست:** اگر  $A$  مجموعه اعداد طبیعی فرد و  $B$  مجموعه اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و غیر تهی است؟

(۱)  $A - B$

(۲)  $B - A$

(۳)  $A \cap B$

(۴)  $A - (A \cup B)$

تحصیل باما

**تست:** اگر  $A = \{x \in \mathbb{U} \mid x^2 > 1\}$  باشد،  $A$  در کدام یک از مجموعه‌های زیر ناتهی و متناهی است؟

(۱)  $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$

(۲)  $(0, 1]$

(۳)  $\mathbb{R} - (-1, 1)$

(۴)  $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| < 3\}$

**تست:** کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

(۱) مجموعه ضرب‌های صحیح ۵ کوچک‌تر از ۲۵

(۲) مجموعه اعداد حسابی و غیر گنگ

(۳)  $W - N$

(۴)  $Z - W$

**تست:** مجموعه‌های اعداد طبیعی، زوج طبیعی، فرد طبیعی، حسابی و صحیح را به ترتیب با  $Z, W, O, E, N$  نشان

می‌دهیم. کدام مجموعه، متناهی و ناتهی است؟

(۱)  $W - Z$

(۲)  $N - O$

(۳)  $E - N$

(۴)  $W - N$

**تست:** مجموعه‌های  $A = \{4^x \mid x \in W\}$  و  $B = \{x^2 \mid x \in Z\}$  مفروض‌اند. چه تعداد از مجموعه‌های  $A \cup B$ ،  $A \cap B$ ،

$A - B$  و  $B - A$  نامتناهی هستند؟

(۱) ۱

(۲) ۲

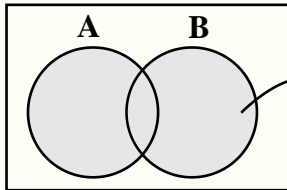
(۳) ۳

(۴) ۴

تحصیل باما

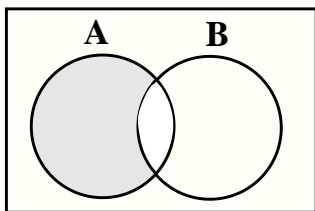
### به موارد مهم زیر توجه کنید:

\* اگر A و B دو مجموعه‌ی متنهایی دلخواه باشند، تعداد اعضای اجتماع آن دو مجموعه از رابطه زیر به دست می‌آید:



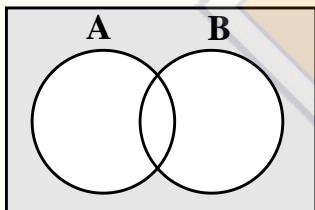
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

\* تعداد اعضای که فقط در مجموعه‌ی A قرار دارند را با  $n(A - B)$  نمایش داده و به این صورت محاسبه می‌کنند:



$$n(A - B) = n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B)$$

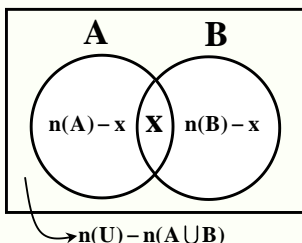
\* تعداد اعضای که نه در A و نه در B قرار دارند را با  $n(A' \cap B')$  نمایش داده و به این صورت محاسبه می‌کنند:



$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(u) - n(A \cup B)$$

### روش حل مسائل به کمک نمودار ون:

برای حل مسائل مربوط به این قسمت، ابتدا نمودار ون مقابل را رسم کرده و به ترتیب زیر اطلاعات مساله را روی نمودار وارد می‌کنیم:



**مرحله ۱:** در ناحیه‌ی اشتراک دو مجموعه‌ی A و B عدد x را می‌نویسیم.

**مرحله ۲:** در طرفین ناحیه‌ی اشتراک دو مجموعه‌ی A و B، عبارات  $n(A) - x$  و  $n(B) - x$  را می‌نویسیم.

**مرحله ۳:** در ناحیه‌ی خارج از اجتماع دو مجموعه‌ی A و B، عبارت  $n(U) - n(A \cup B)$  را می‌نویسیم.

**مرحله ۴:** با توجه به خواسته سوال اعداد موجود را جمع یا کم می‌کنیم.



پس اگر دو مجموعه  $A$  و  $B$  داشتیم و گفتند:

(الف) حداقل یکی از این دو تا  $\leftarrow$  منظور  $A \cup B$  است.

(ب) هر دو با هم  $\leftarrow$  منظور  $A \cap B$  است.

(ج) هیچکدام  $\leftarrow$  منظور  $A' \cap B'$  است.

(د) فقط  $A \leftarrow$  منظور  $A - B$  است.

(ه) فقط  $B \leftarrow$  منظور  $B - A$  است.

(و)  $A$  نباشد  $\leftarrow$  منظور  $A'$  است.

(ی)  $B$  نباشد  $\leftarrow$  منظور  $B'$  است.

**مثال:** در یک کلاس ۴۰ نفره، ۲۵ نفر در درس ریاضی و ۳۰ نفر در درس فیزیک قبول شده‌اند. هم‌چنین ۲۰ نفر در هر دو درس قبول شده‌اند. در این صورت:

(الف) چند نفر در درس ریاضی قبول نشده‌اند؟

(ب) چند نفر فقط در درس فیزیک قبول شده‌اند؟

(ج) چند نفر حداقل در یکی از دروس ریاضی یا فیزیک قبول شده‌اند؟

(د) چند نفر در یکی از دو درس ریاضی و فیزیک قبول نشده‌اند؟

(ه) چند نفر در هیچکدام از دو درس ریاضی و فیزیک قبول نشده‌اند؟

تحصیل باما

**مثال:** اگر  $n(A) = 15$ ،  $n(A \cap B) = 5$  و  $n(A \cup B) = 30$  آنگاه  $n(B)$  را محاسبه کنید. (تقریب کتاب درسی)

**مثال:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع  $U$  باشند، به طوری که  $n(U) = 100$ ،  $n(A) = 60$ ،

$n(B) = 40$  و  $n(A \cap B) = 20$  مطلوب است: (تقریب کتاب درسی)

(الف)  $n(A \cup B)$

(ب)  $n(A \cap B')$

(ج)  $n(A' \cap B)$

(د)  $n(A' \cap B')$

**مثال:** در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه

تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان هر دو گروه باشند، مطلوب است: (تقریب کتاب درسی)

(الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

(ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.

**مثال:** در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کرده‌اند که از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته: **(تقریب کتاب درسی)**

**الف)** دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

**ب)** فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.

**ج)** دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

**ه)** از هیچ‌یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

**مثال:** در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ‌یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند.

**تست:** اگر  $n(U) = 40$ ،  $n(A \cup B) = 32$ ،  $n(A \cap B) = 18$  و  $n(B') = 12$  باشند.  $n(A')$  کدام است؟ **(آزمون سنجش)**

۱۵ (۱)

۲۲ (۲)

۱۸ (۳)

۲۸ (۴)

تحصیل باما

**تست:** اگر مجموعه  $B - A$  دارای ۳ عضو و مجموعه B دارای ۵ عضو باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

(۱) دارای ۲ عضو است.

(۲)  $A - B$  دارای ۵ عضو است.

(۳)  $A \cup B$  دارای ۷ عضو است.

(۴)  $A \cap B$  دارای ۲ عضو است.

**تست:** اگر مجموعه‌ی مرجع، ۳۰ عضو داشته باشد و  $n(A \cap B) = ۲$ ،  $n(A \cup B) = ۲۰$ ،  $n(A') = ۲۵$  باشد، آنگاه  $n(B')$  کدام است؟

۱۳ (۱)

۱۵ (۲)

۱۷ (۳)

۱۹ (۴)

**تست:** از یک کلاس ۳۵ نفره، ۲۰ نفر در درس ریاضی و ۲۵ نفر در درس شیمی تجدید شده‌اند. اگر ۱۰ نفر در هر دو درس ریاضی و شیمی تجدید شده باشند، آن‌گاه چند نفر حداقل در یکی از دو درس ریاضی و شیمی تجدید شده‌اند؟

۲۵ (۱)

۱۵ (۲)

۱۰ (۳)

۳۵ (۴)

**تست:** تعداد مسافریں در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آنها تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این تاجریں، برای اولین بار سفر کرده‌اند. چند نفر از مسافریں نه تاجر هستند و نه برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

۳۲ (۱)

۴۰ (۲)

۴۵ (۳)

۵۴ (۴)

**تست:** در یک مدرسه ۵۰ نفر فوتبال و ۳۰ نفر والیبال بازی می‌کنند و ۲۰ نفر هیچ‌یک از این دو ورزش را انجام نمی‌دهند. اگر این مدرسه ۹۰ دانش‌آموز داشته باشد، چند دانش‌آموز فقط یکی از ورزش‌های فوتبال یا والیبال را انجام می‌دهند؟

۳۰ (۱)

۴۰ (۲)

۶۰ (۳)

۵۰ (۴)

**تست:** در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۴ نفر در ورزش هندبال و ۱۲ نفر در ورزش والیبال فعال هستند. اگر ۸ نفر در هیچ یک از این دو ورزش فعال نباشند، چند نفر فقط به یکی از این دو ورزش می‌پردازند؟

(۱) ۱۸

(۲) ۲۰

(۳) ۲۲

(۴) ۲۴

**تست:** در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن‌هایی که نه مزرعه چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعه چای دارند؟ (کشاورزان فقط چای و برنج برداشت می‌کنند). (تجربی دهه ۱۴۰۱)

(۱) ۱۰۰

(۲) ۱۳۵

(۳) ۲۳۵

(۴) ۲۷۰

**تست:** مجموعه‌های  $A$  و  $B$  به ترتیب دارای  $m$  و  $k$  عضو هستند. اگر  $m - k = 14$  و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های  $A \cup B$  و  $A \cap B$  برابر ۲۰ باشد، مجموع  $B - A$  چند عضو دارد؟ (داخل تجربی ۱۴۰۲)

(۱) ۸

(۲) ۶

(۳) ۴

(۴) ۳

**مثال:** اگر  $n(A) = 60$  و  $n(B) = 70$  و  $n(A - B) = 15$  آنگاه  $n(A \cup B)$  را بدست آورید. (فصلی خرداد ۱۴۰۳)

**تست:** در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (داخل ۹۸)

۱۵ (۱)

۱۶ (۲)

۱۷ (۳)

۱۸ (۴)

**تست:** در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر آنان عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (خارج ۹۸)

۱۵ (۱)

۱۸ (۲)

۲۱ (۳)

۲۲ (۴)

**تست:** در بین اعضای گروه ۳۵ نفری، ۱۰ نفر فقط مجله‌های هنری، ۱۲ نفر مجله‌های علمی و ۱۸ نفر یا فقط مجله‌های هنری یا فقط مجله‌های ورزشی را می‌خوانند. اگر افرادی که مجله ورزشی را می‌خوانند، هیچ مجله دیگری را نخوانند، آن‌گاه چند نفر هیچ‌کدام از مجله‌ها را نمی‌خوانند؟

(۱) ۱۰

(۲) ۵

(۳) ۱۵

(۴) ۲

**تست:** اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  دارای ۳۰ عضو است. مجموعه‌های  $A - B$  و  $A \cap B$  به ترتیب ۷ و ۵ عضو دارند. اگر از هر مجموعه، ۵ عضو برداشته شود، از اشتراک آن‌ها ۲ عضو کم می‌شود، اجتماع مجموعه‌های جدید  $A$  و  $B$  چند عضو دارد؟

(۱) ۱۸

(۲) ۱۹

(۳) ۲۱

(۴) ۲۲

**تست:** اگر  $n(A \cup B) = ۵۷$  و  $n(A \cap B) = ۳n(A - B) = ۴n(B - A)$  باشد، تعداد اعضای مجموعه  $A$  کدام

است؟ (داخل تجربی ۱۴۰۳ - اردیبهشت)

(۱) ۳۳

(۲) ۳۶

(۳) ۴۵

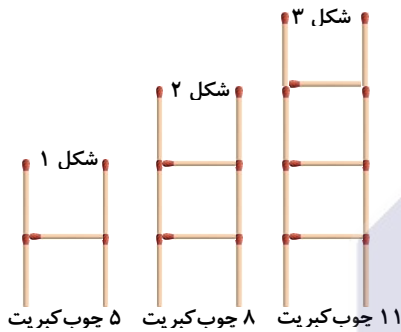
(۴) ۴۸

تحصیل باما

## الگو:

الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

**مثال:** به شکل‌های زیر و تعداد چوب‌کبریت‌های به کار رفته در هر یک از آن‌ها توجه کنید.



n: شماره شکل	۱	۲	۳	۴		n	
$a_n$ : تعداد چوب‌کبریت‌ها	۵	۸	۱۱				
رابطه بین $a_n$ و n	$a_1 = 5$	$a_2 = 8$	$a_3 = 11$			$a_n =$	

توجه شود که تعداد چوب‌کبریت‌های شکل اول برابر ۵ است که به این صورت نشان می‌دهیم:  $a_1 = 5$  (a اندیس ۱ برابر ۵ است) به همین ترتیب  $a_2 = 8$ ,  $a_3 = 11$  و... به این اعداد جملات الگو گفته می‌شود.

اکنون با توجه به موارد گفته شده به سوال‌های زیر پاسخ دهید:

**الف)** نشان‌دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟

**ب)**  $a_n$  به چه معناست؟

تحصیل باما

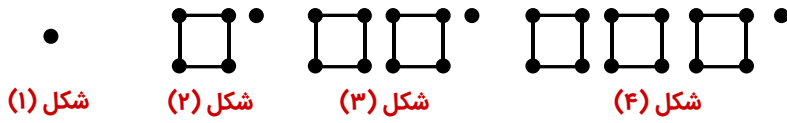
**ج)** آیا می‌توانید  $a_n$  را بر حسب n بدست آورید؟

در مثال بالا دیدیم که  $a_n$  بیانگر تعداد چوب‌کبریت‌های شکل n ام است.  $a_n = 3n + 2$  را جمله عمومی الگو می‌نامیم. چون این رابطه در واقع جملات الگو را مشخص می‌کند و به کمک آن می‌توان مقدار هر جمله از الگو را بدست آورد. مثلاً در مثال قبل جمله بیستم الگو برابر است با:

و همچنین جمله سی‌ام:



**مثال:** به شکل زیر و تعداد نقطه توجه کنید:



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

شکل (۴)

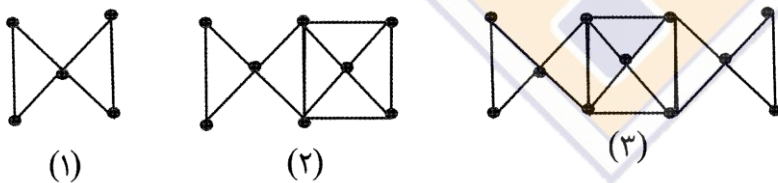
به سوالات زیر پاسخ دهید:

**الف)** جملات الگو را بنویسید؟

**ب)** جمله عمومی الگو را بنویسید؟

**ج)** جمله دهم الگو را مشخص کنید؟

**تست:** جمله عمومی تعداد نقاط الگوی زیر کدام است؟



(۱)

(۲)

(۳)

$$a_n = 6n \quad (۱)$$

$$a_n = 6n + 2 \quad (۲)$$

$$a_n = 3n + 2 \quad (۳)$$

$$a_n = 3n - 2 \quad (۴)$$

تحصیل باما

## الگوها به دو صورت اند:

۱. الگوی خطی

۲. الگوی غیر خطی

## الگوی خطی:

اگر در یک دنباله اختلاف هر دو جمله متوالی عدد ثابتی باشد آن را الگوی خطی می‌نامیم. مانند دو مثال قبل:

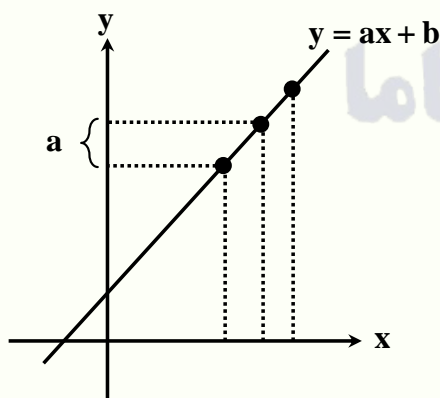
۲۵, ۲۱, ۱۷, ۱۳, ... یا ۱, ۵, ۹, ۱۳, ... یا ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ...

جمله عمومی الگوهای خطی به این صورت است:

$$t_n = an + b$$

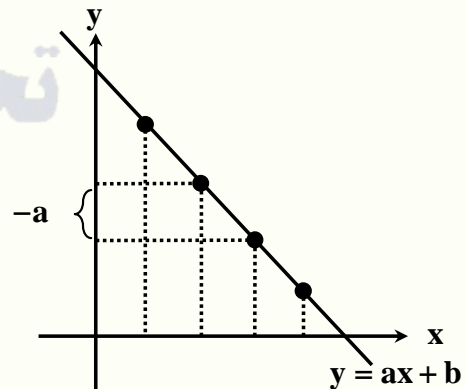
اختلاف هر ۲  
جمله متوالی

در الگوی خطی میزان تغییر جملات متوالی برابر  $a$  است. پس اگر  $a > 0$  باشد هر جمله نسبت به جمله قبلی خودش  $a$  واحد افزایش می‌یابد و اگر  $a < 0$  باشد هر جمله از جمله قبلی کمتر است.



$$t_n = a_n + b$$

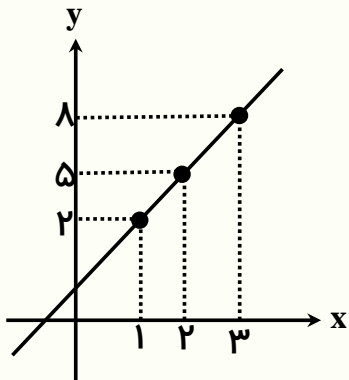
$$a > 0$$



$$t_n = an + b$$

$$a < 0$$

**توجه:** اگر نقاط  $(۱, ۲), (۲, ۵), (۳, ۸), \dots$  را در صفحه‌ی مختصات مشخص کنیم، آنگاه این نقاط روی خط  $y = ۳x - ۱$  قرار دارند. به همین دلیل چنین الگوهایی را الگوی خطی می‌نامیم.



**نتیجه:** اختلاف دو جمله متوالی در الگوهای خطی، همان شیب خط می‌باشد.

**مثال:** جمله عمومی الگوهای خطی زیر را بنویسید؟

**الف)**  $۲, ۵, ۸, ۱۱, \dots \rightarrow$

**ب)**  $-۱, ۳, ۷, ۱۱, \dots \rightarrow$

**ج)**  $۱۱, ۷, ۳, -۱, -۵, \dots \rightarrow$

**مثال:** در یک الگوی خطی جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷، ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را

بیابید؟ (قرین کتاب درسی)

تحصیل باما

**مثال:** در یک الگوی خطی جملات سوم و هشتم به ترتیب ۱۷، ۴۲ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

**تست:** در یک الگوی خطی جمله پنجم دو برابر جمله هفدهم است، کدامیک از عبارتهای زیر برابر صفر می‌باشد؟ (آزمون کانون)

- (۱) مجموع جملات ۲۷ و ۳۳ ام
- (۲) مجموع جملات ۲۵ و ۳۳ ام
- (۳) مجموع جملات ۲۴ و ۳۰ ام
- (۴) مجموع جملات ۲۴ و ۳۲ ام

**تست:** در یک الگوی خطی جمله پنجم برابر ۶ و جمله دوازدهم دو برابر جمله چهارم است. جمله چهاردهم کدام است؟ (آزمون سنجش)

- (۱) ۱۵
- (۲) ۱۲
- (۳)  $\frac{۸}{۳}$
- (۴)  $\frac{۳۵}{۳}$

تحصیل باما

**تست:** در یک الگوی خطی جمله سوم برابر ۳ و جمله هفتم برابر ۱۱ می‌باشد. جمله چندم این الگو برابر ۲۱ است؟

- (۱) دهم
- (۲) یازدهم
- (۳) دوازدهم
- (۴) سیزدهم

**تست:** در یک الگوی خطی جملات ششم و دوم به ترتیب برابر ۲۰ و ۶ هستند. اولین جمله سه رقمی این الگو کدام است؟

۱۰۱ (۱)

۱۰۲ (۲)

۱۰۳ (۳)

۱۰۴ (۴)

**تست:** اگر ۸ و ۵ به ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جمله شانزدهم کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰)

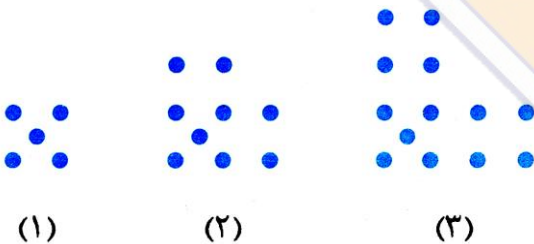
۱۱/۶ (۱)

۹/۶ (۲)

۲/۴ (۳)

۱/۴ (۴)

**تست:** با توجه به روند موجود در الگوی زیر، در مرحله چندم ۵۳ نقطه وجود دارد؟



۱۱ (۱)

۱۲ (۲)

۱۳ (۳)

۱۴ (۴)

تحصیل باما

چند الگوی مهم

$$\text{مجموع اعداد طبیعی: } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{مجموع اعداد فرد: } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$\text{مجموع اعداد زوج: } 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$$

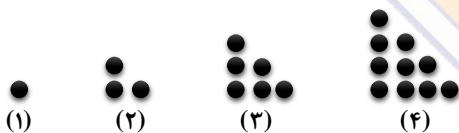
**تست:** مجموع اعداد طبیعی دو رقمی کدام است؟

- (۱) ۴۹۴۵  
 (۲) ۴۹۰۵  
 (۳) ۴۹۲۵  
 (۴) ۴۹۹۵

**تست:** در دنباله  $t_n = \frac{1+3+5+\dots+2n+1}{n+1}$  جمله نهم کدام است؟

- (۱) ۸/۱  
 (۲) ۱۲/۱  
 (۳) ۱۰  
 (۴) ۱۱

**تست:** در الگوی زیر، تعداد نقاط ۱۰۰ امین شکل کدام است؟



- (۱) ۵۰۰۰  
 (۲) ۵۰۵۰  
 (۳) ۵۱۰۰  
 (۴) ۵۱۵۰

## الگوهای غیر خطی:

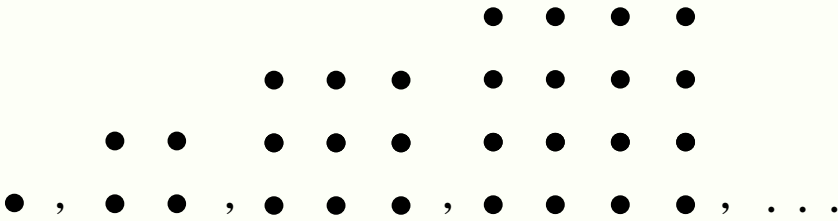
هر الگویی که جمله عمومی آن به صورت  $t_n = an + b$  نباشد را الگوی غیر خطی می‌گوئیم. به عنوان مثال الگوهای  $a_n = n^2 - 4n$  و  $b_n = \frac{1}{n}$  الگوهای غیر خطی‌اند.

پس واضح است که در الگوهای غیر خطی اختلاف بین هر دو جمله متوالی الگو مقدار ثابتی نیست. مثلاً این دنباله:

۲, ۵, ۱۰, ۱۷, ...

که جمله عمومی این دنباله عبارت است از:  $n^2 + 1$  که خطی نیست.

### چند نمونه از الگوهای غیر خطی:



توجه شود که به این الگو ..... گویند.

جمله عمومی الگو ←



توجه شود که به این الگو ..... گویند.

جمله عمومی الگو ←

### الگوهای درجه دوم

الگوهایی که جملات آن به صورت  $t_n = an^2 + bn + c$  می باشند، **الگوهای درجه دوم** می نامند.

در این الگوها، اختلاف جملات متوالی، خود تشکیل الگویی خطی می دهند که اختلاف جملات آن، ۲ برابر ضریب  $n^2$  می باشد.

مثلا الگوی  $t_n = n^2 + n$  را در نظر بگیرید.

تحصیل باما

جملات دنباله: ۲ ۶ ۱۲ ۲۰ ۳۰ ۴۲ ۵۶:

جملات دنباله



اختلاف جملات متوالی: ۴ ۶ ۸ ۱۰ ۱۲ ۱۴

فاصله اختلاف جملات متوالی: ۲ ۲ ۲ ۲ ۲

اختلاف جملات متوالی، از الگوی خطی پیروی می کند.

**نکته:** در الگوی درجه دوم  $t_n = an^2 + bn + c$  فاصله اختلاف جملات متوالی، ۲ برابر ضریب  $n^2$  یعنی  $2a$  است.







## دنباله:

هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامیم.  
به هر کدام از اعداد، جملات دنباله گفته می‌شود.

**توجه:** بعضی وقتها جملات دنباله دارای یک الگو هستند و گاهی نیز فاقد الگو هستند.  
اگر بتوانیم الگوی جملات یک دنباله را بنویسیم به آن جمله عمومی دنباله می‌گوئیم.

**مثال:** به دو دنباله زیر توجه کنید:

۱, ۳, ۷, ۱۳, ۱۹, ۲۹, ...

۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ...

آیا در دنباله اول الگوی مشخص وجود دارد؟

در دنباله دوم چطور؟

جمله عمومی دنباله دومی را بنویسید؟

**بدانید که:** دنباله تابعی است که دامنه آن اعداد طبیعی است و دقیقاً به همین دلیل در ضابطه آن به جای  $x$  از  $n$

استفاده می‌شود. یعنی در یک دنباله ورودی‌های ما عبارت‌اند از:  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

**توجه:** هر دنباله یک جمله عمومی دارد. که آن را با  $a_n$  یا  $t_n$  یا  $u_n$  نشان می‌دهند.

به این مثال‌ها توجه کنید و جمله عمومی هر دنباله را بنویسید.

①  $1, 2, 3, \dots \Rightarrow$

⑤  $2, 5, 8, 11, \dots \Rightarrow$

②  $1, 3, 5, \dots \Rightarrow$

⑥  $-1, 3, 7, 11, \dots \Rightarrow$

③  $2, 4, 6, 8, \dots \Rightarrow$

⑦  $1, 1, 2, 6, 24, \dots \Rightarrow$

④  $1, 2, 4, 8, 16, \dots \Rightarrow$

**مثال:** جمله عمومی دنباله‌ای به صورت  $a_n = \frac{3n-1}{n}$  است. سه جمله اول آن را بنویسید؟

**مثال:** دنباله  $a_n = \frac{n}{n+1}$  مفروض است. کدام جمله این دنباله برابر  $\frac{2}{3}$  می‌باشد؟

**تست:** جمله عمومی دنباله‌ای به صورت  $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$  است. کدام جمله این دنباله برابر  $\frac{5}{3}$  است؟

- (۱) جمله دوم
- (۲) جمله دوازدهم
- (۳) جمله هفتم
- (۴) جمله نهم

تحصیل با ما

**مثال:** رابطه  $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$  با شرط  $a_1 = 1, a_2 = 2$  مفروض است. جمله چهارم این دنباله را بیابید؟

**تست :** در دنباله اعداد ... $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}$  جمله هفدهم کدام است؟

- / ۶۴ (۱)
- / ۶۶ (۲)
- / ۶۸ (۳)
- / ۷۲ (۴)

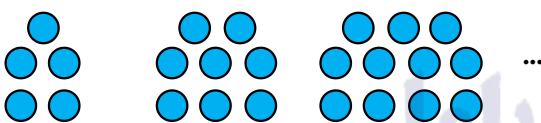
**تست :** جمله نهم دنباله اعداد ... $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$  کدام است؟

- $\frac{1}{90}$  (۱)
- $\frac{1}{84}$  (۲)
- $\frac{1}{72}$  (۳)
- $\frac{1}{64}$  (۴)

**تست :** جمله هفتم دنباله اعداد ... $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}$  کدام است؟

- / ۱۲ (۱)
- / ۱۴ (۲)
- / ۱۵ (۳)
- / ۱۷ (۴)

**تست :** در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها در شکل دوازدهم کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)



- ۳۴ (۱)
- ۳۶ (۲)
- ۳۸ (۳)
- ۴۰ (۴)

**تست :** اگر جمله  $n$ ام یک دنباله برابر  $a_n = 2^n + n$  باشد، تفاضل جمله پنجم از دهم چقدر است؟

- ۹۹۲ (۱)
- ۹۹۵ (۲)
- ۹۹۷ (۳)
- ۹۸۷ (۴)

**تست:** جمله نهم دنباله ... ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳ کدام است؟

(۱) ۲۱

(۲) ۳۴

(۳) ۳۵

(۴) ۵۵

**پاسخ:** به این دنباله، دنباله فیبوناتچی گویند و دنباله‌ای است که از جمله دوم به بعد هر جمله برابر مجموع دو جمله قبلی است یعنی:

$$t_3 = t_2 + t_1 = 1 + 1 = 2$$

$$t_4 = t_3 + t_2 = 2 + 1 = 3$$

$$t_5 = t_4 + t_3 = 3 + 2 = 5$$

$$t_6 = 5 + 3 = 8$$

$$t_7 = 8 + 5 = 13$$

$$t_8 = 13 + 8 = 21$$

$$t_9 = 21 + 13 = 34$$

## انواع دنباله:

۱. دنباله حسابی

۲. دنباله هندسی

تحصیل باما

## دنباله حسابی (عددی):

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت قدر نسبت دنباله می‌گویند و با  $d$  نشان می‌دهند.

**توجه:** دنباله حسابی (عددی) همان الگوی خطی است که قبلاً به آن پرداخته شد.

**مثال:** در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید. (قرین کتاب درسی)

**الف)**  $5, 10, 15, 20, \square, \square, \square, \dots$ ,  $d =$  ,  $a_n =$

**ب)**  $1, 3, 5, 7, \square, \square, \square, \dots$ ,  $d =$  ,  $b_n =$

**پ)**  $5, 9, 13, 17, \square, \square, \square, \dots$ ,  $d =$  ,  $c_n =$

**ت)**  $13, 7, 1, -5, \square, \square, \square, \dots$ ,  $d =$  ,  $d_n =$

پس دنباله حسابی به این صورت است:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

بنابراین جمله عمومی دنباله حسابی عبارتست از:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

تحصیل باما

**تذکره (۱):**  $t_1$  جمله اول و  $d$  قدر نسبت است.

**تذکره (۲):** جمله عمومی دنباله حسابی یک عبارت درجه اول بر حسب  $n$  بوده و ضریب  $n$  برابر  $d$  می‌باشد.

**تذکره (۳):** همچنین در دنباله حسابی با قدر نسبت  $d$ :

**الف)** اگر  $d > 0$  آنگاه جمله‌های دنباله افزایشی (صعودی) هستند.

**ب)** اگر  $d = 0$  آنگاه دنباله ثابت است.

**ج)** اگر  $d < 0$  آنگاه جمله‌های دنباله کاهشی (نزولی) هستند.

## چگونه قدر نسبت دنباله حسابی را بدست آوریم:

۱- اگر دو جمله متوالی دنباله را داشته باشیم کافایت برای بدست آوردن  $d$  آن‌ها را از هم کم کنیم. مثلا اگر جمله دوم ۹ و جمله سوم ۱۱ باشد  $d = 11 - 9 = 2$

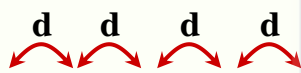
۲- اگر دو جمله غیر متوالی دنباله را داشته باشیم به این صورت عمل می‌کنیم.

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

مثلا اگر  $a_m, a_n$  جملات  $m$  ام و  $n$  ام دنباله باشند آنگاه قدر نسبت برابر است با:

مثلا اگر جمله دوم ۷ و جمله ششم ۲۳ باشد:

$$d = \frac{a_6 - a_2}{6 - 2} = \frac{23 - 7}{4} = \frac{16}{4} = 4$$



$a_1, 7, a_3, a_4, a_5, 23$

$$\Rightarrow 4d = 23 - 7 = 16 \Rightarrow d = 4$$

البته بدون فرمول هم می‌شود به قدر نسبت رسید:

## واسطه عددی:

اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی از یک دنباله عددی باشند  $b$  واسطه هندسی  $a$  و  $c$  است (همان میانگین) یعنی:

$$b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b = a+c$$

**مثال: الف)** بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند. در این

حالت می‌گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه حسابی درج کرده‌ایم. (کتاب درسی)

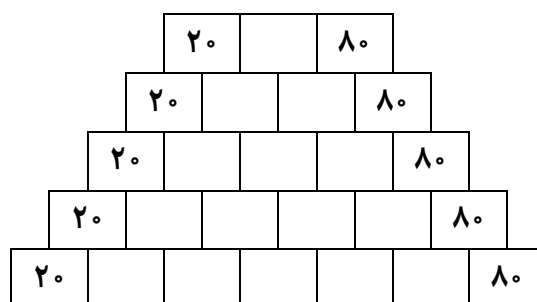
**پاسخ:** با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدر نسبت را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 62 \end{cases}$$

$$t_5 = 62 \rightarrow t_1 + 4d = 62 \rightarrow d = \text{○}$$

$t_1$				$t_5$
۱۸				۶۲

**ب)** بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.



## به مثال‌های متنوع از دنباله حسابی توجه کنید.

**مثال:** در یک دنباله حسابی با جمله اول  $t_1 = 3$  و قدر نسبت  $d = -2$ ، جمله عمومی را مشخص کنید. جمله هفتم این دنباله چند است؟

**مثال:** در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. با بدست آوردن جمله اول و قدر نسبت، جملات دنباله را بنویسید.

**مثال:** در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

## تحصیل یاما

**تست:** ۳ عدد  $c$ ، ۵ و  $a$  مفروض است. اگر به عدد  $a$ ، ۴ واحد اضافه و از عدد  $c$ ، ۳ واحد کم کنیم، اعداد حاصل

تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت ۳ می‌دهند. حاصل  $\frac{c-1}{a}$  کدام است؟

- (۱) ۵
- (۲) -۵
- (۳)  $\frac{7}{2}$
- (۴)  $-\frac{7}{2}$



**تست :** در دنباله حسابی  $t_n$ ، حاصل  $\frac{t_5 + 2t_{11}}{3}$  برابر کدام جمله است؟

- (۱) دهم
- (۲) نهم
- (۳) هشتم
- (۴) هفتم

**مثال :** بین دو عدد ۷ و ۳۲، چهار واسطه عددی درج کنید.

**تست :** اگر  $2, \dots, 2x-1, 3x+1, 5x-2$  یک دنباله حسابی باشد، قدر نسبت و  $x$  چقدر اختلاف دارند؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۵
- (۴) ۷

**تست :** بین دو عدد ۳ و ۲۷ پنج واسطه حسابی می‌نویسیم. واسطه سوم چند برابر قدرنسبت دنباله است؟

- (۱) ۳
- (۲)  $\frac{3}{25}$
- (۳)  $\frac{3}{5}$
- (۴)  $\frac{3}{75}$

**تست :** تفاضل جمله هشتم از دهم یک دنباله حسابی ۸ و مجموع دو جمله هفتم و پنجم، ۹۰ است. جمله ۵۱ این دنباله کدام است؟ (آزمون سنجش)

(۱) ۴۰۵

(۲) ۴۱۳

(۳) ۵

(۴) ۳۹۲

**تست :** اگر مجموع دو جمله‌ای اول یک دنباله حسابی برابر ۱ و جمله هفتم این دنباله برابر با ۳ باشد، جمله هجدهم آن کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۲۸

(۳) ۳۸

(۴) ۱۸

**تست :** کدام گزینه در مورد دنباله  $a_n = n^2 - (n-1)^2$  صحیح است؟

(۱) حسابی با قدر نسبت  $d = 2$  است.(۲) هندسی با قدر نسبت  $q = 2$  است.(۳) حسابی با قدر نسبت  $d = 1$  است.(۴) هندسی با قدر نسبت  $q = 1$  است.

**تست :** اگر  $8A + 1$ ،  $7A - 3$  و  $3A + 2$ ، با همین ترتیب، سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، مقدار  $A$  کدام

است؟

(۱) ۶

(۲) ۱۸

(۳) ۹

(۴) ۳

**مثال:** اعداد  $x+2, 2x+7, 7-2x$  به ترتیب از چپ به راست جملات چهارم، دوازدهم و بیستم یک دنباله حسابی هستند. جمله چهارم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۷  
(۲) ۱۸  
(۳) ۱۹  
(۴) ۲۰

**تست:** در مثلث قائم الزاویه‌ای طول اضلاع، دنباله حسابی می‌سازند. اگر محیط مثلث ۶۰ باشد، مساحتش چقدر است؟

- (۱) ۲۵۰  
(۲) ۲۰۰  
(۳) ۱۵۰  
(۴) ۱۰۰

**تست:** مجموع ۳ جمله متوالی یک دنباله حسابی برابر ۹ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱۵ است. حاصل ضرب دو جمله کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) -۳  
(۲) ۱۵  
(۳) ۳  
(۴) -۱۵

**تست:** دنباله حسابی ...، ۲۱، ۱۶، ۱۱، ۶ چند جمله سه رقمی دارد؟

- (۱) ۱۸۰  
(۲) ۱۸۱  
(۳) ۱۷۹  
(۴) ۱۷۸

**تست:** فرض کنید  $a_n$  الگویی خطی باشد، اگر  $a_{2n} = 2a_n + 3$  و  $a_3 = 4$ ، آنگاه  $a_7$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{40}{3}$   
 (۲) ۱۳  
 (۳) ۱۲  
 (۴)  $\frac{۳۷}{۳}$

**مثال:** در دنباله‌ی حسابی  $a_n$ ، حاصل  $\frac{a_{12} + a_{15} + a_{18}}{a_{13} + a_{17}}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{۲}{۳}$   
 (۲)  $\frac{۳}{۲}$   
 (۳)  $\frac{۳}{۴}$   
 (۴)  $\frac{۴}{۳}$

**مثال:** اگر بین ۱۳ و ۵۵ تعداد ۵ واسطه‌ی حسابی بنویسیم:

(الف) قدر نسبت دنباله‌ی حسابی حاصل کدام است؟

(ب) مقادیر واسطه‌ها کدام‌اند؟

(ج) جمله‌ی سوم و واسطه‌ی سوم کدام‌اند؟

تحصیل باما

**تست:** جمله‌های چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب جمله دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جمله دهم الگوی خطی باشد. جمله پانزدهم الگو، چند برابر قدر نسبت دنباله حسابی است؟ (کنکور تجربی دهه ۱۴۰۱)

- (۱)  $\frac{6}{5}$   
 (۲)  $\frac{8}{5}$   
 (۳) ۳  
 (۴) ۴

**تست:** در یک دنباله حسابی با جمله اول  $a$  و قدرنسبت  $d$ ، تساوی  $6a^2 = 5a_3a + 3a_4a$  برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به  $d$ ، کدام می‌تواند باشد؟ (کنکور تجربی داخل ۱۴۰۲)

- (۱) ۱  
 (۲)  $1/5$   
 (۳)  $3/5$   
 (۴) ۴

**تست:** از اضافه کردن ۴ واحد به جملات اول و سوم یک دنباله حسابی، جملات اول و دوم دنباله حسابی جدید ساخته می‌شود. اختلاف جمله  $n$ م دو دنباله کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۳ - اردیبهشت)

- (۱) ۴  
 (۲) ۸  
 (۳) ۲  
 (۴) ۶

تحصیل باما

**تست:** مقادیر  $a$ ،  $1+2a$  و  $5-a$  به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر  $a$  جمله نخست این دنباله باشد، جمله نهم کدام است؟ (داخل ۱۴۰۳ - اردیبهشت)

- (۱)  $2/75$   
 (۲)  $4/25$   
 (۳)  $12/25$   
 (۴)  $14/75$

## دنباله هندسی:

دنباله‌ای است که در آن هر جمله (بجز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت بدست آید. این عدد ثابت را قدر نسبت دنباله می‌نامیم و با  $r$  نشان می‌دهیم.

**مثال:** در دنباله‌های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید. (کتاب درسی)

الف)  $2, 6, 18, 54, \boxed{162}, \boxed{486}, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$   
 $\times 3 \times 3 = r$

ب)  $5, 10, 20, 40, \square, \square, \dots, b_n =$

پ)  $6, -60, 600, -6000, \square, \square, \dots, c_n =$

ت)  $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \square, \square, \dots, d_n =$

پس دنباله هندسی به این صورت است.

$$a, ar, ar^2, \dots$$

پس جمله عمومی دنباله هندسی عبارتست از:

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

**تذکره (۱):** جمله اول و  $r$  قدر نسبت است.

**تذکره (۲):** در دنباله هندسی با قدرنسبت  $r$ :

**(الف)** اگر  $r > 1$  باشد آنگاه دنباله هندسی، صعودی (افزایشی) است. مانند:  $2, 6, 18, \dots$

**(ب)** اگر  $0 < r < 1$  باشد آنگاه دنباله هندسی، نزولی (کاهشی) است. مانند:  $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \dots$

**(ج)** اگر  $r < 0$  آنگاه دنباله هندسی یکی در میان مثبت و منفی است که در این حالت دنباله نه صعودی است

نه نزولی مانند:  $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$

**(د)** اگر  $r = 1$  باشد آنگاه همه جملات دنباله با هم برابر خواهند شد که دنباله ثابت است مانند:  $2, 2, 2, \dots$

## چگونه قدر نسبت دنباله هندسی را بدست آوریم:

۱- اگر دو جمله متوالی دنباله را داشتیم کافیست آنها را تقسیم کنیم تا  $r$  بدست آید مثلا اگر جمله دوم ۵ و جمله سوم

$$10 \text{ باشد آنگاه } r = \frac{10}{5} = 2$$

۲- اگر دو جمله غیر متوالی دنباله را داشته باشیم به این صورت عمل می‌کنیم. مثلا اگر  $a_m$  و  $a_n$  جملات  $m$  و  $n$  ام دنباله باشند.

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

مثلا اگر جمله سوم ۲ و جمله هشتم ۶۴ باشد:

$$r^{8-3} = \frac{a_8}{a_3} \rightarrow r^5 = \frac{64}{2} = 32 \rightarrow r = 2$$

تحصیل با ما

البته بدون فرمول هم می‌شود به قدر نسبت رسید:

$$\begin{array}{c} \overset{r}{\curvearrowright} \quad \overset{r}{\curvearrowright} \quad \overset{r}{\curvearrowright} \quad \overset{r}{\curvearrowright} \quad \overset{r}{\curvearrowright} \\ 2, a_4, a_5, a_6, a_7, 64 \end{array}$$

$$r^5 = \frac{64}{2} = 32 \rightarrow r = 2$$

## واسطه هندسی:

اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند  $b$  واسطه هندسی  $a$  و  $c$  است یعنی:  $b^2 = ac \rightarrow b = \pm \sqrt{ac}$

**مثال: الف)** اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. در این حالت می‌گوییم ۱۲ یک واسطه هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می‌توان در نظر گرفت؟ *(کتاب درسی)*

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_3 = 48 \rightarrow t_1 r^2 = 48 \rightarrow \dots \rightarrow r = \dots \end{cases}$$

۳		۴۸
---	--	----

**ب)** بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟

۳				۴۸
---	--	--	--	----

**پ)** جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

۱۰				۴۰۰۰
۱۰				۸۰۰۰۰
۴				۹۷۲

**به مثال‌های متنوع از دنباله هندسی توجه کنید.**

**مثال:** در یک دنباله هندسی با جمله دوم  $a_2 = 8$  و  $q = 3$  (قدرنسبت) جمله عمومی به چه صورت است؟

**مثال:** در یک دنباله هندسی جمله سوم برابر ۵ و جمله ششم برابر ۴۰- می‌باشد. جمله عمومی این دنباله را تعیین کنید.



**مثال:** بین دو عدد ۱ و ۲۴۳، چهار واسطه هندسی درج کنید.

**تست:** اگر  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  یک دنباله هندسی با جملات مثبت باشد و  $a_1 a_3 = 4$  و  $a_3 a_5 = 16$ ، قدر نسبت این

دنباله کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- $\sqrt{2}$  (۳)
- $\sqrt{8}$  (۴)

**مثال:** جمله‌های چهارم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۲۴ و ۱۹۲ است. قدرنسبت دنباله را بدست

آورید؟ (نهایی خرداد ۱۴۰۳)

تحصیل با ما

**تست:** سه برابر جمله اول به همراه جمله سوم و ثلث جمله ششم از دنباله‌ای حسابی، تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

$$(1) \frac{1}{6}$$

$$(2) \frac{1}{2}$$

$$(3) \frac{1}{3}$$

$$(4) \frac{1}{4}$$

**تست:** در دنباله هندسی ...، ۲۵، ۵، ۱، حاصل ضرب ۵۰ جمله اول آن کدام است؟

$$(1) 5^{1275}$$

$$(2) 5^{1225}$$

$$(3) 5^{1176}$$

$$(4) 5^{1125}$$

**تست:** در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، بین دو عدد  $a$  و  $b$ ، ۷ واسطه هندسی قرار می‌دهیم. اگر دومین واسطه هندسی ۲ و ششمین واسطه هندسی ۳۲ باشد، جمله چهارم این دنباله با جمله اول  $a$  کدام است؟

$$(1) 2$$

$$(2) 4$$

$$(3) 8$$

$$(4) 16$$

**تست:** با افزودن مقدار ثابتی به جملات دوم و سوم و چهارم دنباله مثلثی، جملات متوالی یک دنباله هندسی به دست می‌آید. قدرنسبت این دنباله هندسی کدام است؟ (دنباله مثلثی به صورت ... ۱, ۳, ۶, ۱۰ است.)

- (۱)  $\frac{3}{2}$   
 (۲)  $\frac{4}{3}$   
 (۳)  $\frac{6}{5}$   
 (۴)  $\frac{7}{6}$

**تست:** در یک دنباله هندسی حاصل ضرب سه جمله دوم ۲۰ برابر حاصل ضرب دو جمله دوم است. اگر جمله پنجم این دنباله برابر  $\frac{2}{5}$  باشد، قدرنسبت دنباله برابر با کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$   
 (۲) ۲  
 (۳)  $\frac{5}{2}$   
 (۴) ۳

**تست:** جملات سوم و پنجم یک دنباله هندسی به ترتیب ۲۴ و  $\frac{32}{3}$  است. جمله هفتم این دنباله هندسی کدام است؟

- (۱)  $\frac{128}{81}$   
 (۲)  $\frac{64}{27}$   
 (۳)  $\frac{128}{27}$   
 (۴)  $\frac{64}{81}$

تحصیل باما

**تست :** به ازای یک مقدار از  $x$ ، اعداد  $x, x+4$  و  $2x-6$  به ترتیب سه جمله اول دنباله هندسی هستند. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

(۱)  $3, \frac{1}{2}$

(۲)  $3, -\frac{1}{2}$

(۳)  $-3, \frac{1}{2}$

(۴)  $-3, -\frac{1}{2}$

**مثال :** در دنباله هندسی با جمله عمومی  $t_n = 12\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}$  مقدار جمله اول چند برابر قدر نسبت است؟

**تست :** حاصل ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی  $\frac{27}{8}$  و مجموع دو جمله بزرگ تر،  $\frac{15}{4}$  است. قدرنسبت این

دنباله کدام است؟

(۱)  $\frac{6}{5}$

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۳)  $\frac{5}{4}$

(۴)  $\frac{4}{3}$

تحصیل باما

**تست :** در دنباله هندسی با جمله عمومی  $t_n = 2 \times (5)^{n-1}$ ، قدر نسبت کدام است؟

- (۱) ۵  
(۲) ۲۵  
(۳) ۱۲۵  
(۴) ۶۲۵

**تست :** اگر در یک دنباله هندسی حاصل ضرب ۹ جمله اول ۵۱۲ باشد، حاصل ضرب جمله سوم، پنجم و هفتم کدام است؟

- (۱) ۴  
(۲) ۲۷  
(۳) ۸  
(۴) ۲

**تست :** اگر جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت  $r$  را نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت  $d$  خواهید داشت.

مقدار  $r + d$  کدام است؟ (لنگور ریاضی داخل ۱۱۴۰۲)

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳)  $\sqrt{2}$   
(۴)  $\frac{1}{2}$

**تست :** در یک دنباله هندسی، جمله سوم جذر جمله چهارم و جمله پنجم برابر ۲۷ است. جمله اول دنباله چقدر از

$\frac{1}{2}$  کمتر است؟ (تجربی داخل ۱۱۴۰۳-تیر)

- (۱)  $\frac{5}{2}$   
(۲)  $\frac{4}{2}$   
(۳)  $\frac{1}{4}$   
(۴)  $\frac{1}{6}$



تحصیل باما