هایلایت
HighLight

هندسه ۳ فصل اول

ماتریس و کاربردها

ماتریس:

آرایشی از اعداد در یک جدول مستطیلی که شامل سطرها و ستون‌هایی باشد یک ماتریس خوانده می شود.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

مرتبه یک ماتریس:

هر ماتریسی که m سطر و n ستون داشته باشد، ماتریس از مرتبه $m\times n$ می‌نامند.

درایه ماتریس:

هر کدام از اعداد واقع در ماتریس را درایه یا عنصر ماتریس می‌نامند و درایه‌ای که در سطر i و ستون j ماتریس قرار دارد را با a_{ij} نشان می‌دهند. یعنی هر درایه دارای یک آدرس است که اولی نشان دهنده شماره سطر و دومی نشان دهنده شماره ستون آن است.

درایه سطر i ام و ستون j ام $= a_{ij}$

مثال: به این ماتریس‌ها توجه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ & -۲ & ۸ \\ ۷ & ۴ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} ۴ & ۸ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۶ \\ ۳ & ۱۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

انواع ماتریس:

۱. ماتریس سطری: ماتریسی را گویند که یک سطر و چند ستون دارد.

$$A_{1n}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{bmatrix}_{1\times n}$$

۲. ماتریس ستونی: ماتریسی را گویند که یک ستون و چند سطر دارد.

$$A_{m1}=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}_{m\times 1}$$

۳. ماتریس مربعی: ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌هایش برابر باشند.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

توجه۱: درایه های a_{11} و a_{22} و a_{33} را درایه های قطر اصلی و درایه‌های a_{13} و a_{22} و a_{31} را درایه های قطر فرعی می گوئیم.

توجه۲: درایه a_{22} را که هم روی قطر اصلی و هم روی قطر فرعی است درایه مرکزی گوئیم که مختص ماتریس های مربع از مرتبه فرد است.

توجه۳: در هر ماتریس مربعی، مجموع درایه‌های قطر اصلی را اثر ماتریس می‌نامند و اثر ماتریس A را با $tr(A)$ نشان می‌دهند.

۴. ماتریس قطری: ماتریسی مربعی است که درایه های غیر قطر اصلی آن صفر است.(درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند)

$$\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$$

۵. ماتریس اسکالر: اگر در یک ماتریس قطری درایه‌های قطر اصلی همگی برابر باشند، ماتریس را اسکالر می نامند.

$$\begin{bmatrix}k & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & k\end{bmatrix}$$

۶. ماتریس واحد: اگر در یک ماتریس اسکالر درایه های قطر اصلی همگی برابر عدد ۱ باشند، ماتریس را واحد می‌نامند و با I نشان می دهند. (ماتریس همانی)

$$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

۷. ماتریس بالا مثلثی: ماتریس مربعی که کلیه درایه‌های واقع در زیر قطر اصلی آن صفر باشد را ماتریسی بالا مثلثی گویند.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

۸. ماتریس پایین مثلثی: ماتریس مربعی که کلیه درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی آن صفر باشد را ماتریسی پایین مثلثی گویند.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 5 & 9 & 7\end{bmatrix}$$

مثال: در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2m & -1 \\ m+1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ داریم $3a_{31}-2a_{22}=0$ عدد m را بیابید.

نمایش ماتریس وقتی ضابطه دادند:

بدانید که در بعضی موارد به جای نشان دادن درایه های ماتریس ضابطه ای برای تعیین درایه های آن ماتریس داده می شود که با توجه به آن ضابطه ماتریس را می نویسیم. به این ترتیب که ابتدا با توجه به مرتبه آدرس خام را مشخص می‌کنیم سپس رفتار خواسته شده با i و j را انجام می‌دهیم.

تست: مجموع درایه‌های ماتریس $A=\left[i^2+j^2\right]_{2\times 3}$ کدام است؟

۱) ۴۲

۲) ۴۵

۳) ۴۴

۴) ۴۳

مثال: ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ با ضابطه $A=\begin{cases} i+j & i>j \\ ij & i=j \\ |i-j| & i<j \end{cases}$ تعریف شده است. ماتریس A را مشخص کنید.

تست: در ماتریس $A_{3\times 3}$ درایه‌های روی قطر اصلی برابر صفر و سایر درایه‌ها از رابطه $a_{ij}=i^2-ij$ به دست می‌آیند. مجموع همه درایه‌های این ماتریس چقدر است؟

۱) ۶

۲) ۲

۳) صفر

۴) -2

تساوی دو ماتریس (هم مرتبه):

دو ماتریس برابرند اگر و فقط اگر درایه های نظیر در دو ماتریس با هم برابر باشند.

$$A_{mn} = B_{mn} \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

مثال: اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ مساوی باشند $(x+y+z)$ را بیابید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

جمع و تفریق دو ماتریس(هم مرتبه):

دو ماتریس قابل جمع و یا تفریق می باشند هرگاه هم مرتبه باشند و برای جمع و تفریق آنها درایه های نظیر در دو ماتریس را با هم جمع و تفریق می کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۸ \\ ۴ & ۷ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۲ & ۴ \\ ۵ & ۴ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & ۷ \\ ۸ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در ماتریس:

برای ضرب کردن یک عدد در یک ماتریس کافی است آن عدد را در تک تک درایه های ماتریس ضرب کنیم.

$$rA = r\left[a_{ij}\right] = \left[ra_{ij}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ & ۱ \\ ۲ & ۳ & -۲ \end{bmatrix} \rightarrow ۳A = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس:

۱) $A+B=B+A$ جابجایی

۲) $A+\overline{O}=A$ عضو خنثی

۳) $A+(-A)=\overline{O}$ عضو قرینه

۴) $A+(B+C)=(A+B)+C$ شرکت پذیری

۵) $A+B=B+C \rightarrow A=C$ حذف پذیری

۶) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۷) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

۸) $rA=rB\ ,\ r\neq ۰ \rightarrow A=B$

۹) $A=B \rightarrow rA=rB$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ & ۴ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ و ماتریس C به گونه‌ای باشد که $A-B+C$ برابر یک ماتریس اسکالر با مجموع درایه‌های ۶- شود آنگاه ماتریس C را بدست آورید؟

ضرب ماتریس‌ها:

شرط آنکه بتوان ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]$ و $B=\left[b_{ij}\right]$ را در هم ضرب کرد این است که:

$$A_{m\times p}\cdot B_{p\times n}=C_{m\times n}$$

به طوریکه هر درایه ماتریس C از ضرب یک سطر ماتریس A در یک ستون ماتریس B بدست می آید.

مثال: ابتدا یک ماتریس سطری را در یک ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۲ & ۱ & ۷ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \\ ۶ \\ ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} \boxed{۲} & \boxed{۳} & \boxed{-۲} & \boxed{۱} & \boxed{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{۳} \\ \boxed{۴} \\ \boxed{۶} \\ \boxed{۵} \\ \boxed{۲} \end{bmatrix}=$$

مثال: ضرب‌های زیر را انجام دهید:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}=\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}\begin{bmatrix} -۱ & ۵ \\ ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times ۲}=\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times ۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}=\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}_{۳\times ۳}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

تست: دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & m & ۰ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۴ & ۱ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر عنصر واقع در سطر دوم و ستون اول ماتریس AB برابر ۶ باشد، m کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱/۵

۳) ۱/۵−

۴) ۲−

مثال: اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times ۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}-۱ & |i-j|>۱\\ ۰ & |i-j|=۱\\ ۱ & |i-j|<۱\end{cases}$ باشد، ماتریس $A^{۲}-۲I$ را به دست آورید. (نهایی خرداد ۱۴۰۳)

چند ویژگی از ضرب ماتریس‌ها:

۱) ضرب ماتریس ها در حالت کلی جابجایی ندارد.

۲) ضرب ماتریس ها شرکت پذیری دارد. $A\times B\times C=(AB)C=A(BC)$

۳) اگر A و B دو ماتریس ضرب پذیر و r و s دو عدد حقیقی باشند، آنگاه: $(rA).(sB)=(rs)(AB)$

۴) ضرب ماتریس ها روی عمل جمع (یا تفریق) توزیع پذیر است. $\begin{cases}A(B\pm C)=AB\pm AC\\ (A\pm B)C=AC\pm BC\end{cases}$

۵) خاصیت "حذف پذیری" در ضرب ماتریس ها در حالت کلی برقرار نیست. $AB=AC \not\longrightarrow B=C$

۶) ممکن است ضرب دو ماتریس برابر ماتریس صفر شود ولی هیچ کدام ماتریس صفر نباشند.

$$\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

نتیجه ویژگی ۴: فاکتورگیری در ماتریس

شرط ۱ :

شرط ۲ :

تست: اگر A و B دو ماترس مربعی مرتبه ۲ و $AB=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس $B\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ \frac{۴}{۳} & -۴\end{bmatrix}A-\frac{۳}{۲}B\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ -۱ & -۶\end{bmatrix}A$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۳_اردیبهشت)

۱) ۳

۲) -۳

۳) ۹

۴) -۹

ماتریس‌های تعویض پذیر:

دو ماتریس مربعی هم مرتبه A و B را تعویض پذیر می گوئیم، هرگاه $AB=BA$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}}^{A}\underbrace{\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}}^{B}=\begin{bmatrix}۱۳ & -۱۱\\ -۱۱ & ۱۳\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}}_{A}=\begin{bmatrix}۱۳ & -۱۱\\ -۱۱ & ۱۳\end{bmatrix}$$

* هر دو ماتریس قطری هم مرتبه تعویض پذیرند.
* ماتریس همانی باهر ماتریس مربعی هم‌مرتبه باخودش تعویض‌پذیر است. $IA=AI=A$
* هر ماتریس اسکالر، با هر ماتریس هم مرتبه با خودش تعویض پذیر است.

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۳\\ ۴ & ۰\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۰\\ ۷ & ۵ & ۴\end{bmatrix}$ باشند، مرتبه ماتریس C چند باشد تا حاصلضرب BCA تعریف گردد؟

۱) ۳×۲

۲) ۲×۳

۳) ۲×۲

۴) ۳×۳

تست: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A، کدام است؟ (خارج ۱۴۰۰)

۱) ۱۲
۲) ۱۷
۳) ۱۹
۴) ۲۱

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-2&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^2 چند برابر مجموع درایه‌های A است؟ (داخل ۱۴۰۳_تیرماه)

۱) ۱
۲) -1
۳) -3
۴) ۳

تاکتیک تستی ⇦

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی C^2 کدام است؟ (داخل ۹۷)

۱) ۱۶
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۲۴

تست: به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ \\ y & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟ (خارج ۹۸)

۱) $x = ۱, y = -۷$

۲) $x = ۲, y = -۷$

۳) $x = ۲, y = -۵$

۴) $x = ۱, y = -۵$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} x & -۱ & -x \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ y & z & z \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۲z & \frac{۱}{۲} & ۲ \\ ۲z & ۰ & -۴y \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$ و ماتریس AB به ازای $y \in \mathbb{Z}$ ماتریس اسـکالر باشـد،

مقدار xy کدام است؟ (داخل ۱۴۰۱)

۱) -۱

۲) -۲

۳) ۱

۴) ۲

توجه‌مهم:

تست: بـرای دو مـاتریس A و B، اگـر $A - B = [i - j]_{۲\times۲}$ و $AB + BA = \begin{bmatrix} ۷ & ۹ \\ ۹ & ۱۳ \end{bmatrix}$ باشـد، آن‌گـاه مجمـوع

درایه‌های ماتریس $A^۲ + B^۲$ کدام است؟ (آزمون کانون)

۱) ۴۸

۲) ۳۶

۳) ۲۴

۴) ۱۸

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ حاصل $I+(A-I)(A^۲+A+I)$ را بیابید؟

توان در ماتریس:

- $A^۰ = I$
- $A^۱ = A$
- $A^۲ = A.A$
- $A^۳ = A.A^۲$ یا $A^۲.A$
- $A^۴ = A.A^۳$ یا $A^۳.A$ یا $A^۲.A^۲$
- $A^m.A^n = A^n.A^m = A^{m+n}$
- $(A^m)^n = (A^n)^m = A^{mn}$

بطورکلی ⇦

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & x & y \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^۳$ کدام است؟

۱) $۳x$

۲) $۳y$

۳) $۲(x^۲+y^۲)$

۴) $۳(x^۲+y^۲)$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، سطر سوم ماتریس $A^۳$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۳ـ اردیبهشت)

۱) $\begin{bmatrix} ۵ & ۱ & -۱۰ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & -۱۰ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -۵ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -۲ & ۵ & ۷ \end{bmatrix}$

توان n ام یک ماتریس قطری:

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^n - A^{n-۱}$ کدام است؟

محاسبه توان‌های بزرگ در ماتریس:

اول توان ۲

به الگو می‌رسیم $\Leftarrow$

به الگو نمی‌رسیم $\Leftarrow$

اگر در توان دوم ...

۱) اگر توان دوم یک ماتریس برابر I شود توان‌های زوج آن ماتریس برابر I و توان‌های فرد آن ماتریس برابر خود ماتریس می‌باشد.

۲) اگر توان دوم یک ماتریس، ماتریس صفر شود به آن ماتریس پوچ توان گویند و در این حالت سایر توان‌های ماتریس نیز صفر است.

۳) اگر توان دوم یک ماتریس برابر خود ماتریس شود به آن ماتریس خودتوان گویند و در این حالت سایر توان‌های ماتریس نیز برابر خود ماتریس است.

۴) اگر توان دوم یک ماتریس مضربی از آن ماتریس شود برای توان‌های بالاتر الگوی زیر برقرار است.

آن‌هایی که با توان دوم به الگو می‌رسیم:

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}, BA^n=\begin{bmatrix}۳۲ & ۳۲\\ ۱۶ & ۱۶\end{bmatrix}$ باشد n کدام است؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۳

۴) ۶

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^{۱!}+۲A^{۲!}+۳A^{۳!}+\dots+۱۰A^{۱۰!}$ کدام است؟

۱) $۵A+۵I$

۲) $A+۱۵I$

۳) $A+۵۴I$

۴) $۵۵A$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^{۱۲}$ کدام است؟

۱) صفر

۲) $۲^{۱۱}$

۳) $۲^{۱۲}$

۴) $۲^{۱۳}$

آن‌هایی که با توان دوم به الگو نمی‌رسیم:

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $(A+I)^۶=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $a-b$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۶

۳) ۱

۴) ۳۶

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد در ماتریس $A^{۱۰۰}$ مجموع درایه‌ها کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) -۱

۴) ۲

تاکتیک تستی ⇦ قضیه کیلی - همیلتون:

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد همواره داریم:

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ و $A^۲ = \alpha A + \beta I$ باشد، دو تایی (α,β) کدام است؟

۱) $(۲,۱۱)$

۲) $(۲,۱۳)$

۳) $(۴,۱۱)$

۴) $(۴,۳)$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} a & -۳ \\ x & ۶ \end{bmatrix}$ و $A^۲ = A$ باشد $a + x$ کدام است؟

۱) ۲

۲) -۲

۳) صفر

۴) -۴

دترمینان

اگر A یک ماتریس مربعی باشد دترمینان A را با نماد $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش می‌دهیم و یک عدد حقیقی است که به ماتریس A نسبت داده می‌شود.

دترمینان ماتریس‌های مربعی ۱×۱ و ۲×۲:

۱) $\boxed{A=[k]_{۱\times۱}\rightarrow|A|=k}$

$$A=[-۷]\rightarrow|A|=-۷$$

۲) $\boxed{A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\rightarrow|A|=ad-bc}$

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۵ & ۷\end{bmatrix}\rightarrow|A|=(۲\times۷)-(۳\times۵)=\boxed{-۱}$$

تست: در کدام ماتریس اگر به همه درایه‌ها مقداری مخالف صفر و یکسان اضافه کنیم، دترمینان تغییر نمی‌کند؟

۱) $\begin{bmatrix}۱۱ & ۲۳\\ -۱۰ & ۳\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}۱۴ & ۷\\ ۲۹ & ۲۲\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}-۱۹ & ۱۴\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}۱۳ & ۱۷\\ ۹ & ۱۲\end{bmatrix}$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}\log_{۶}^{۳} & \log_{۶}^{۲}\\ \log_{۶}^{۲} & \log_{۶}^{۳}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۶^{|A|} & ۲^{|A|}\\ ۳^{|A|} & ۳۶^{|A|}\end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان B، کدام است؟ (داخل ۱۴۰۲)

۱) $\frac{۹}{۴}$

۲) $\frac{۱۵}{۴}$

۳) $\frac{۹}{۸}$

۴) $\frac{۱۵}{۸}$

دترمینان ماتریس‌های ۳ × ۳:

قبل از آموزش نحوه محاسبه دترمینان ماتریس‌های ۳ × ۳ شما را با دو تعریف آشنا می‌کنم.

کهاد (مینور):

اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ ماتریسی دلخواه باشد در این صورت ij امین کهاد ماتریس A را با M_{ij} نشان می دهیم و ماتریسی است که از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A بدست می آید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۶ & ۳ & ۹ \end{bmatrix} \rightarrow \quad M_{۱۳} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix} \quad M_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & ۹ \end{bmatrix} \quad M_{۲۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix}$$

همسازه(کوفاکتور):

اگر $A[a_{ij}]_{۳\times۳}$ ماتریسی دلخواه باشد در این صورت ij امین همسازه A را با A_{ij} نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.

مثال: در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ مطلوبست؟

$A_{۱۱} =$

$A_{۲۱} =$

$A_{۳۳} =$

$A_{۲۳} =$

روش محاسبه دترمینان ماتریس های ۳ × ۳ :

برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ می‌توانیم نسبت به هر سطر یا هر ستون دلخواه (هیچ فرقی در جواب ندارد) بسط داده دترمینان را محاسبه کنیم بدین ترتیب که ابتدا سطر یا ستون مورد نظر برای بسط را انتخاب می‌کنم سپس هر درایه را در همسازه‌اش ضرب کرده و حاصل هر قسمت را بدست آورده و با هم جمع می‌کنیم عدد نهایی دترمینان ماتریس ۳×۳ است.

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & \boxed{a_{۱۲}} & a_{۱۳} \\ \boxed{a_{۲۱}} & a_{۲۲} & \boxed{a_{۲۳}} \\ a_{۳۱} & \boxed{a_{۳۲}} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

مثال: دترمینان مقابل را با بسط حول سطر اول حساب کنید.

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} =$$

مثال: دترمینان های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۵ \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۱ & ۹ \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۵ & ۶ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ ۵ & ۱ & ۴ \end{vmatrix} =$$

تست: با توجه به تساوی مقابل، مقدار x کدام است؟

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۳ & n & -۱ \end{vmatrix} = x + ۳n$$

۱) ۷-

۲) ۱۵

۱) ۱۳-

۴) ۱۷

تست: جواب‌های معادله $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -۴ \\ 1 & ۲-x & 1 \\ ۳-x & ۲ & ۳ \end{vmatrix} = ۰$ کدام است؟ (داخل۹۹)

۱) $۱,-۴$

۲) $۱,۴$

۳) $۱,۵$

۴) $۲,۵$

نتیجه۱:

نتیجه۲:

تست: اگر حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ -a & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$ برابر ۶ باشد، a کدام است؟

۱) -۳

۲) -۲

۳) ۲

۴) ۳

مثال: حاصل دترمینان های زیر را بیابید.

$$\begin{vmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ d & b & ۰ \\ e & f & c \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} =$$

نتیجه‌مهم:

تست: اگر هر یک از درایه‌های یک ماتریس قطری ۳×۳ را در شماره سطر و ستون آن ضرب کنیم آنگاه دترمینان ماتریس حاصل چند برابر دترمینان ماتریس اولیه است؟

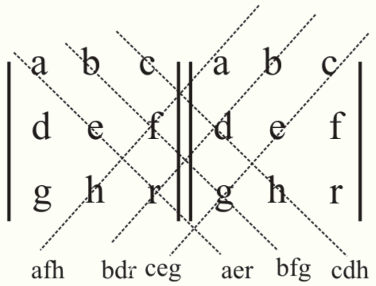
۱) ۸

۲) ۲۷

۳) ۳۶

۴) ۶۴

روش ساروس (فقط برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های ۳×۳):



$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & r \end{vmatrix}$$

$$\boxed{(aer+bfg+cdh)-(afh+dbr+ceg)}$$

مثال: دترمینان‌های مقابل را با روش ساروس بدست آورید؟

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{vmatrix}$$

ویژگی‌های دترمینان:

ویژگی‌اول: اگر یک سطر یا یک ستون از دترمینانی در یک عدد حقیقی ضرب شود، همانند آن است که حاصل آن دترمینان در آن عدد حقیقی ضرب شده است.

نتیجه۱:

مثال: اگر $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=-2$ ، حاصل $\begin{vmatrix}a_1&-3b_1&c_1\\-2a_2&6b_2&-2c_2\\a_3&-3b_3&c_3\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) -12
۲) 6
۳) -6
۴) 12

تست: اگر دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix}k^2a&kb&kc\\kd&e&f\\kg&h&i\end{bmatrix}$ ، ۱۶ برابر دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ باشد، $\begin{vmatrix}|k|&1\\2&k^2\end{vmatrix}$ چقدر است؟ (آزمون گاج)

۱) ۶۰
۲) ۶۲
۳) ۶۴
۴) ۶۶

نتیجه۲:

مثال: $5\begin{vmatrix}2&3&1\\4&2&1\\5&0&9\end{vmatrix}=$

نتیجه۳:

تست: اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A|=4$، آنگاه دترمینان ماتریس $A.|A|$، کدام است؟ (داخل ۹۸)

۱) ۶۴

۲) ۹۶

۳) ۱۲۸

۴) ۲۵۶

تست: اگر A و B ماتریس های وارون پذیر و λ یک عدد حقیقی باشد کدام گزینه در مورد دترمینان آن‌ها نادرست است؟ (داخل ۹۱)

۱) $\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$

۲) $|AB|=|BA|$

۳) $|\lambda A|=\lambda|A|$

۴) $\left|AB^{-1}\right|=|A|\left|B^{-1}\right|$

ویژگی‌دوم: اگر جای دو سطر یا دو ستون از دترمینانی عوض شود، مقدار دترمینان قرینه می‌گردد.

مثال: حاصل دترمینان‌های زیر را بیابید.

الف) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}=$

ب) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$

مثال: در یک ماتریس همه اعضاء بجز قطر فرعی صفر است. اگر اعضای قطر فرعی برابر $a_1, a_2, \ldots, a_7$ باشند، دترمینان این ماتریس کدام است؟

$$\begin{vmatrix} & & & & & & a_1 \\ & & & & & a_2 & \\ & & & & a_3 & & \\ & & & a_4 & & & \\ & & a_5 & & & & \\ & a_6 & & & & & \\ a_7 & & & & & & \end{vmatrix}$$

مثال: حاصل $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix}$ کدام است؟

ویژگی سوم: اگر دو سطر یا دو ستون از دترمینانی یکسان باشند، حاصل آن دترمینان صفر است.

تست: حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۴ & ۲ \end{vmatrix}$ کدام است؟

نتیجه:

تست: معادله $\begin{vmatrix} ۱ & ۲x & -۱ \\ ۱ & -۲x & ۱ \\ ۱ & -۴x & ۲ \end{vmatrix} = ۰$ چند ریشه دارد؟

۱) ۳

۲) بی‌شمار

۳) ۱

۴) صفر

ویژگی چهارم: در هر دترمینان همواره می توان مضربی از یک سطر یا یک ستون را به سطر یا ستون دیگر اضافه یا کم کرد بدون آنکه مقدار دترمینان تغییر کند.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} \xrightarrow{۲R_۱+R_۲\to R_۲}$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} \xrightarrow{-C_۲+C_۱\to C_۱}$$

تست: اگر a و b دو عدد حقیقی و i و j شماره سطر و ستون هر درایه باشند، دترمینان ماتریس $A=[ai+bj]_{۳\times۳}$ کدام است؟

۱) صفر

۲) $ab(a+b)$

۳) $a.b$

۴) $a+b$

ویژگی پنجم: (خاصیت ضربی دترمینان) اگر A و B دو ماتریس مربعی هرمرتبه باشند آنگاه: $|AB|=|A||B|$ پس نتیجه می‌شود ⇦

تست: اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ و $AB=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ و $BA=۵\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ a & -۱ \end{bmatrix}$ باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۱

۲) -۱

۳) ۲

۴) -۲

تست: اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۲\times۲}$ و $B=\left[a_{ji}\right]_{۲\times۲}$ دو ماتریس وارون‌پذیر باشند، ماتریس AB کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$

تست: اگر $\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۲ \\ ۶ & ۱ & -۵ \\ ۴ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۵ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}=A$ باشد، دترمینان A کدام است؟

۱) ۶

۲) ۸

۳) ۱۶

۴) ۱۲

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$، حاصل $\left|A^۳\right|$ کدام است؟

۱) -۱

۲) ۸

۳) ۱

۴) -۸

بدانیدکه ⇦

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & m \\ ۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱۰ & ۱ \\ -۱ & \pi & \sqrt{۲} \end{bmatrix}$ و $|AB|=۰$ باشد، مقدار m چقدر است؟

۱) $m\in\mathbb{R}$

۲) فقط $m=۰$

۳) فقط $m=۱$

۴) $\{۰,۱\}$

ویژگی ششم: (خاصیت تفکیک) در هر دترمینان همواره می‌توان به دو سطر(یا ستون) دست نزد و سطر یا ستون دیگر را متناسب با مسئله تفکیک کرد.

مثال:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_۱+a_۲ & b_۱+b_۲ & c_۱+c_۲ \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

تست: اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & k \\ ۳ & ۴ & ۵ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱+a & ۲+b & k \\ ۳ & ۴ & ۵ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ دارای دترمینان برابر صفر باشند، آنگاه:

۱) $a-b=۰$

۲) $a+۵b=۰$

۳) $۵a+b=۰$

۴) $a+b=۰$

تست: حاصل $\begin{vmatrix} ۲a & c-b & e-d \\ -b & -c & ۰ \\ b & -c & -۲d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b-c & d-e \\ b & c & ۰ \\ -b & c & ۲d \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $۶adc$

۲) $-۶adc$

۳) صفر

۴) $-۴acd$

تست: در دترمینان روبرو اگر درایه سطر دوم و ستون سوم را ۲ واحد کم کنیم دترمینان چه تغییری می‌کند؟

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ x & m & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}$$

۱) ۱۰ واحد کم می شود
۲) ۱۰ واحد اضافه می شود
۳) ۵ واحد کم می شود
۴) ۵ واحد اضافه می شود

در دترمینان های پارامتری اینگونه عمل کنید:

اگر بخواهیم حاصل یک دترمینان با درایه های پارامتری را در تست تشخیص دهیم بهترین راه عدد دادن به پارامترهاست. فقط در عددگذاری باید دقت کرد که به ازای اعداد انتخاب شده گزینه ها متفاوت باشند یعنی در هنگام انتخاب اعداد باید نگاه ما به سمت گزینه ها باشد.

توجه اول: در دترمینان اگر چندین پارامتر در مسأله بود می توان همه را یکسان فرض کرد و یک عدد به آن‌ها داد مگر آنکه شرایط مسأله اجازه ندهد.

توجه دوم: در دترمینان ها صفر اهمیت خاصی دارد. تا جای ممکن به پارامترها صفر می دهیم مگر آنکه گزینه ها اجازه ندهد.

تست: مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} a+b & a+c & b+c \\ c & b & a \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $a+b+c$
۲) ۰
۳) ۲
۴) $۲(a+b+c)$

تست: اگر $a+b+c=۵$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۴+a & b & c \\ a & ۴+b & c \\ a & b & ۴+c \end{vmatrix}$ کدام است؟ (خارج ۹۶)

۱) ۱۲۰
۲) ۱۲۴
۳) ۱۳۵
۴) ۱۴۴

تست: در ماتریس $A=\begin{vmatrix} a+x & a & a \\ b & b+x & b \\ c & c & c+x \end{vmatrix}$ اگر مجموع تمام درایه ها برابر ۶ و مقدار $|A|=8$ باشد، x کدام است؟

۱) صفر

۲) ± 1

۳) ± 2

۴) ± 3

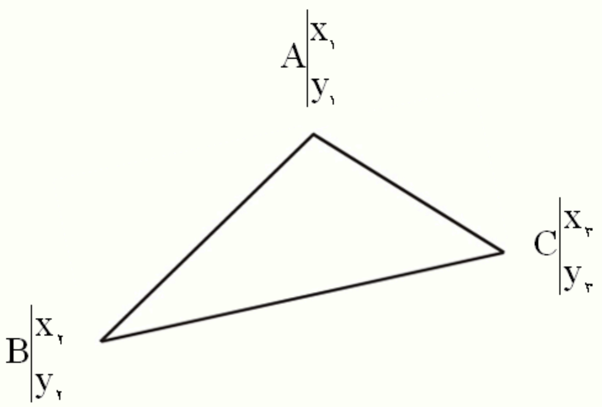
نمایش معادله خط توسط دترمینان

معادله خطی که از دو نقطه $A(a,b)$ و $B(c,d)$ می گذرد به صورت روبرو است. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix}=0$

مثال: معادله خط گذرا از دو نقطه $A\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$ را بیابید؟

مثال: شیب خط Δ به معادله $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$ کدام است؟

نمایش مساحت یک مثلث توسط دترمینان



$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

مثال: مثلثی به رئوس $A(-1,0)$ ، $B(2,4)$ و $C(0,-1)$ مفروض است. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB برابر است با:

۱) ۱

۲) ۱/۴

۳) ۲/۸

۴) ۳/۲

وارون یک ماتریس:

اگر A یک ماتریس مربعی باشد و ماتریسی مانند B هم مرتبه با A وجود داشته باشد به طوریکه $AB=BA=I$

آنگاه B را وارون ماتریس A می نامیم و با A^{-1} نشان می دهیم.

بنابراین:

مثال: اگر A یک ماتریس مربعی باشد و $A^3-5A^2+A+3I=\bar{o}$ آنگاه وارون A را بیابید.

تست: اگر $A^2+5A-6I=\bar{O}$ باشد، وارون ماتریس $(A+4I)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}(A+I)$

۲) $\frac{1}{10}(A-I)$

۳) $-\frac{1}{10}(A-I)$

۴) $-\frac{1}{10}(A+I)$

تست: اگر وارون ماتریس A با خودش برابر باشد، وارون ماتریس $2I-A$ کدام است؟ (آزمون سنجش)

۱) $2I-A$

۲) $\frac{1}{2}I-A$

۳) $I+A$

۴) $\frac{2}{3}I+\frac{A}{3}$

تست: اگر A یک ماتریس مربعی باشد به طوریکه $A^2 \neq 0$ و $A^3=0$ آنگاه معکوس ماتریس $I-A$ به کدام صورت است؟

۱) A^2-A

۲) A^2+A+I

۳) A^2-A+I

۴) A^2+A

چند نکته و ویژگی مهم از وارون:

۱) وارون یک ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.(**قضیه یکتایی وارون**)

اثبات: فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند ثابت می‌کنیم $B=C$

طبق فرض: $AB=BA=I$

طبق فرض : $AC=CA=I$

$$B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=I$$

۲) اگر دو ماتریس تعویض پذیر و وارون پذیر باشند آنگاه وارون های آن‌ها نیز تعویض پذیرند.

۳) اگر A و B ، ماتریس های مربعی وارونپذیر و هم مرتبه باشند و K عددی حقیقی مخالف صفر باشد آنگاه:

شرط وارونپذیری

اثبات:

وارونپذیر است $\xrightarrow{A^{-1}\text{ وجود دارد}} A.A^{-1}=I \xrightarrow{\text{دترمینان}} |A.A^{-1}|=۱$

$\xrightarrow{\text{خاصیت ضربی}} |A||A^{-1}|=۱$ ⟵ $|A|\neq ۰$ و $|A^{-1}|\neq ۰$

نتیجه‌مهم:

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۱ \\ a-۱ & ۲ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد و $B=\begin{bmatrix} a & a+۲ & a+۳ \\ a+۱ & ۲a & a+۴ \\ a+۱ & a+۱ & ۳a \end{bmatrix}$ در این صورت دترمینان $-B^{-۲}$ کدام است؟ (مدارس برتر تهران)

۱) $-\frac{۱}{۲۱۶}$

۲) $-\frac{۱}{۳۶}$

۳) $\frac{۱}{۶}$

۴) $-\frac{۱}{۶}$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & m \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & ۰ \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $C=AB$ و $۳|C^{-۱}|^{۲}-۲|C^{-۱}|-۱=۰$ برقرار باشد، کمترین مقدار m چقدر است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $-\frac{۴}{۳}$

۳) -۴

۴) صفر

تذکر ⇦

تست: اگر $ABA^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $AB^{۱۰}A^{-۱}$ چقدر است؟

۱) ۱۰۲۴

۲) ۴۰۹۶

۳) ۲۰۴۸

۴) ۵۱۲

وارون ماتریس‌های ۲×۲

اگر $A\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آنگاه $\Leftarrow$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}$$

تست: در $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۱ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ و $۲I-۳A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ باشـــد، مجمـــوع درایـــه‌های قطـــر اصـــلی ماتریس $۲A-۳B^{-۱}$ کدام است؟ (داخل ۱۴۰۳_تیرماه)

۱) -۱

۲) -۲

۳) -۳

۴) -۴

تست: مـاتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}$، I مـاتریس همـانی و α و β دو عـدد حقیقـی هسـتند کـه $\alpha A+\beta I=A^{-۱}$، مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱) -۴

۲) ۴

۳) -۲

۴) ۲

پیدا کردن یک ماتریس از ضرب چند ماتریس (حذف عامل مزاحم):

اگر در یک تساوی ماتریسی مانند $AB=C$ بخواهیم ماتریس A یا ماتریس B را پیدا کنیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$AB=C \xrightarrow[\text{در } A^{-1} \text{ ضرب}]{\text{از سمت چپ}} A^{-1}\times AB=A^{-1}\times C \to B=A^{-1}\times C$$

$$AB=C \xrightarrow[\text{در } B^{-1} \text{ ضرب}]{\text{از سمت راست}} AB\times B^{-1}=C\times B^{-1} \to A=C\times B^{-1}$$

تست: اگر ماتریس‌های A و $I+A$ وارون هم باشند، از رابطه $AX=A^{۲}+A$ ، ماتریس X کدام است؟

۱) $A+۲I$

۲) $A-I$

۳) $A^{-۱}$

۴) $A^{-۱}-I$

تست: از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}X\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ ، ماتریس X کدام است؟ (داخل ۹۹)

۱) $\begin{bmatrix} ۹ & ۷ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۹ & ۷ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۷ & ۹ \\ -۴ & -۴ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -۷ & -۹ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} -۳ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و ماتریس X در رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}=X\begin{bmatrix} |A| & ۲|A| \\ \frac{۲}{|A|} & ۱ \end{bmatrix}$ صدق کند، کوچک‌ترین درایه قطر اصلی ماتریس X کدام است؟ (داخل ۱۴۰۱)

۱) -۱۵

۲) -۳

۳) ۶

۴) ۸

حل دستگاه معادلات به کمک ماتریس وارون:

دستگاه دو معادله دو مجهول $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

این دستگاه نشان دهنده معادله دو خط در $\mathbb{R}^۲$ است همانطور که می‌دانید دو خط در فضای ۲ بعدی $(\mathbb{R}^۲)$ می‌توانند موازی (در حالت خاص منطبق) یا متقاطع باشند. وقتی می‌گوییم دستگاه را حل کنید درحقیقت منظور بدست آوردن نقطه تلاقی دو خط است. در حقیقت هدف از حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول پیدا کردن x و y ای است که در هر دو معادله دستگاه صدق کند. اکنون سه ماتریس تعریف می‌کنیم.

ماتریس مجهولات $= X = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم $= B = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب $= A = \begin{bmatrix} \quad \quad \end{bmatrix}$

با توجه به دستگاه فوق داریم: $\boxed{AX=B}$

حال برای بدست آوردن مجهولات از رابطه ماتریسی فوق کافیست طرفین تساوی را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب کنیم خواهیم داشت.

$$A^{-۱}(AX)=A^{-۱}B \Rightarrow (\underbrace{A^{-۱}A}_{I}\ X)=A^{-۱}B \Rightarrow \boxed{X=A^{-۱}B}$$

مثال: دستگاه معادلات $\begin{cases} ۳x+۷y=-۴ \\ -۵x+۲y=-۷ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. (نهایی خرداد ۱۴۰۳)

تست: اگر وارون ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} ۴x+my=۷ \\ nx+۳y=۴ \end{cases}$ به صورت $\begin{bmatrix} P & -۱۱ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع جواب‌های دستگاه کدام است؟ (آزمون گزینه دو)

۱) -۱۴

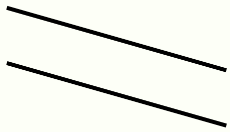
۲) ۱۲

۳) -۲۳

۴) ۹

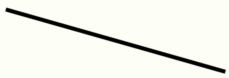
نگاه هندسی به دو معادله و دو مجهول: (بحث در تعداد جواب‌های دستگاه)

الف) موازی



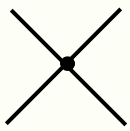
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

ب) منطبق



$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

ج) متقاطع



$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

مثال: به ازای چه مقادیری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} -۴x + (m - ۳)y = ۳ \\ ۲x - \dfrac{m - ۳}{۲}y = ۱ \end{cases}$ یک جواب منحصر به فرد دارد. (نهایی خرداد ۱۴۰۳)

تست: به ازای چند مقدار m دستگاه معادلات زیر جواب ندارد؟

$$\begin{cases}(m+1)x+(2m-1)y=3m+2\\(-m+1)x+(-5m-1)y=-4m+2\end{cases}$$

۱) ۱
۲) ۲
۳) صفر
۴) بی‌شمار

تست: اگر m و n دو عدد حقیقی باشند به طوری که دستگاه معادلات $\begin{cases}mx+2y=-2n-1\\3x+(m+5)y=n+4\end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، چند زوج مرتب (m,n) وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

تست: به ازای چند مقدار m دستگاه معادلات زیر جواب ندارد؟

$$\begin{cases}(m+1)x+(2m-1)y=3m+2\\(-m+1)x+(-5m-1)y=-4m+2\end{cases}$$

۱) ۱
۲) ۲
۳) صفر
۴) بی‌شمار